PROBLEMAS RESUELTOS DE MATEMATICAS

José Tudurí Fortuny

Rafael Casals Cienfuegos-Jovellanos

C.O.U.

matemáticas

C.O.U.

PROBLEMAS RESUELTOS

josé tudurí fortuny
rafael casals cienfuegos-jovellanos
catedráticos de matemáticas

Pedidos a:

José Tudurí Fortuny
Prat de la Riba, 169, ático
Tel. (93) 786 09 57
Terrassa (Barcelona)

Depósito Legal: B. 38.527 - 1980
ISBN 84 - 300 - 3853 - 1

HOREB. - Galvani, 113-115. - TERRASSA

Este libro de problemas, que quiere ser el complemento de nuestro libro de matemáticas de C.O.U., se ha elaborado en la confianza de que pueda ser una eficaz ayuda al estudiante del curso de orientación.

No se ha pretendido dar una colección de problemas totalmente resueltos en la que no queda margen al lector para realizar el necesario aprendizaje, que tan solo se consigue mediante el trabajo personal. Se ha intentado ofrecer en cada ejercicio la ayuda precisa para que el lector pueda resolverlo gradualmente, ofreciéndole los resultados parciales y sugerencias necesarias para ello.

El libro está estructurado en 18 capítulos que se corresponden con el libro de teoría.

En cada uno de ellos se desarrollan, practicamente en su totalidad, aquellos ejercicios que implican la utilización de conceptos que no intervienen en otros anteriores, mientras que en los ejercicios de características similares a otros precedentes se da, unas veces tan solo el resultado final y en otras, además, indicaciones sobre el camino a seguir.

La adecuada resolución de algunos ejercicios de los capítulos 8, 12, 13, 14, 16 y 17 aconseja la utilización de calculadoras, e incluso de calculadoras programables, en todos aquellos casos en que se precisa el cálculo de los distintos valores de una función en diversos puntos de su campo de definición.

LOS AUTORES

CAPITULO I
Espacio vectorial

1 ***Comprobar si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre los cuerpos que se indican:***

$$E = \left\{ (a + b^3\sqrt{2} + c\sqrt{3}),\ a,\ b,\ c \in Q \right\} \quad \textit{sobre } R.$$

$$E = \left\{ (a,b,c) \mid a,\ b,\ c \in q \ ;\ a + 2b = 3c \right\} \quad \textit{sobre } Q.$$

SOLUCION

a) Para que E sea un espacio vectorial sobre R debe estar definida una operación binaria interna . Podemos definirla como:

$$(a + b^3\sqrt{2} + c\sqrt{3}) + (a' + b'^3\sqrt{2} + c'\sqrt{3}) = (a+a') + (b+b')^3\sqrt{2} + (c+c')\sqrt{3}$$

siendo otro elemento de E el resultado de la misma.

Para definir la operación binaria externa existen dificultades.

No es posible definirla como:

$$\alpha\,(a + b^3\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = \alpha a + \alpha b\,{}^3\sqrt{2} + \alpha c\sqrt{3}$$

puesto que no se puede asegurar que αa, αb y αc pertenezcan a Q.

Como no parece posible definir facilmente otra operación externa con los elementos de R, dicho conjunto no es un espacio vectorial sobre R con las operaciones indicadas.

b) Operación binaria interna:

$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a+a', b+b', c+c')$$

cuyo resultado pertenece a E ya que $(a + a') + 2(b + b') = 3(c + c')$ puesto que $a+2b=3c$ y $a'+2b'=3c'$.

Operación binaria externa:

$$\alpha\,(a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$

cuyo resultado es un elemento de E :

$\alpha a \in Q$, $\alpha b \in Q$, $\alpha c \in Q$ y $\alpha a + \alpha b\, 2 = 3\alpha c$ pues $a+2b= 3c$

Definidas las operaciones veamos las propiedades de espacio vectoral.

EV.1

$$\left[(a,b,c) + (a',b',c')\right] + (a'',b'',c'') = (a+a',b+b',c+c') + (a'',b'',c'') =$$

$$= \left((a+a')+a'', (b+b')+b'', (c+c')+c'' \right) = (\text{por ser la suma asociativa en } Q) =$$

$$= \left(a+(a'+a''), b+(b'+b''), c+(c'+c'') \right) = (a,b,c) + (a'+a'', b'+b'', c'+c'') =$$

$$= (a,b,c) + \left[(a',b',c') + (a'',b'',c'')\right] .$$

EV.2

$$(a, b, c) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (a, b, c) = (a, b, c)$$

EV.3

$$(a, b, c) + (-a, -b, -c) = (0, 0, 0)$$

EV.4

$(a,b,c) + (a',b',c') = (a+a' , b+b' , c+c') = (a'+a , b'+b , c'+c) = (a',b',c') + (a,b,c)$

EV.5

$(\alpha+\beta)(a,b,c) = ((\alpha+\beta)a , (\alpha+\beta)b , (\alpha+\beta)c) = (\alpha a+\beta a , \alpha b+\beta b , \alpha c+\beta c) =$

$= (\alpha a , \alpha b , \alpha c) + (\beta a , \beta b , \beta c) = \alpha (a,b,c) + \beta (a,b,c)$.

EV.6

$\alpha \left[(a,b,c) + (a',b',c')\right] = \alpha (a+a' , b+b' , c+c') = (\alpha(a+a'), \alpha(b+b') , \alpha(c+c')) =$

$= (\alpha a+\alpha a' , \alpha b+\alpha b' , \alpha c+\alpha c') = (\alpha a , \alpha b , \alpha c) + (\alpha a' , \alpha b' , \alpha c') = \alpha(a,b,c) + \alpha(a',b',c')$.

EV.7 EV.7

$(\alpha\beta)(a,b,c) = ((\alpha\beta)a , (\alpha\beta)b , (\alpha\beta)c) = (\alpha(\beta a) , \alpha(\beta b) , \alpha(\beta c)) = \alpha (\beta a , \beta b , \beta c) =$

$= \alpha (\beta(a,b,c))$.

EV.8

$1 . (a,b,c) = (1.a , 1.b, 1.c) = (a,b,c)$.

Dado que se cumplen todas E es un espacio vectorial sobre Q.

2 *Analizar si el conjunto de polinomios de grado mayor o igual que 4 a coeficientes racionales, es un espacio vectorial sobre Q.*

SOLUCION

Es evidente que tanto la suma de dos polinomios de grado mayor o igual que 4, como el producto de un polinomio de grado mayor o igual que 4 por un elemento de Q, son elementos de dicho conjunto de polinomios.

La comprobación de las propiedades no presenta dificultades, salvo la necesidad de admitir que el polinomio cero (y que realmente no tiene grado) pertenezca a dicho conjunto.

3 *Se considera el conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, siendo a, b, c números racionales. Se pide comprobar que con las operaciones definidas sobre el conjunto R de los números reales, este conjunto es un espacio vectorial sobre Q.*

SOLUCION

Operación binaria interna:

$$(a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) + (a' + b'\sqrt{2} + c'\sqrt{3}) = (a+a') + (b+b')\sqrt{2} + (c+c')\sqrt{3}$$

Operación binaria externa sobre Q:

$$\alpha (a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}) = (\alpha a) + (\alpha b)\sqrt{2} + (\alpha c)\sqrt{3}$$

Ambas dan como resultado elementos del conjunto.

La comprobación de las propiedades de espacio vectorial no presenta dificultad.

4 *Dado el espacio vectorial R^4 (constituido por los elementos de la forma (a, b, c, d) donde a, b, c, d osn números reales) sobre R, indicar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales de R^4.*

a) $V = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \mid x = y = x = t \quad x \in Z \right\}$

b) $V=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid x=z\ ,\ y=t\ ,\ x\in Z\ ,\ y\in Z\}$

c) $V=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid y=2x\ ,\ t=x+z\}$

d) $V=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid 2y+3z=0\}$

e) $V=\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid 2y+3z=5\}$

SOLUCION

Dado que dichos subconjuntos son no vacíos ((0,0,0,0) pertenece a los cuatro primeros y (0,1,1,0) al quinto) deberá comprobarse en cada caso:

S.1 $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$

S.2 $\alpha\in R\ ,\mathbf{a}\in V \Rightarrow \alpha\,\mathbf{a}\in V$

a) Sean $\mathbf{a}=(x,x,x,x)$ y $\mathbf{b}=(y,y,y,y)$ dos vectores de V. Se tendrá:

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x+y\ ,x+y\ ,x+y\ ,x+y) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$

$\alpha\,.\,\mathbf{a}=(\alpha x\ ,\alpha x\ ,\alpha x,\alpha x) \quad \alpha\in R \quad \Rightarrow \quad \alpha\,.\,\mathbf{a}\notin V$ pues $\alpha x\notin Z$

Por tanto V no es un subespacio vectorial de R^4.

b) Sean $\mathbf{a}=(x,y,x,y)$ y $\mathbf{b}=(m,n,m,n)$ dos vectores de V. Se tendrá:

$\mathbf{a}+b=(x+m\ ,y+n\ ,x+m\ ,y+n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$

$\alpha\,.\,\mathbf{a}=(\alpha x\ ,\alpha y\ ,\alpha x\ ,\alpha y) \quad \alpha\in R \quad \Rightarrow \quad \alpha\,.\,\mathbf{a}\notin V$ pues $\alpha x\notin Z$

Por tanto V no es un subespacio de R^4.

c) Sean $\mathbf{a}=(x,2x,z,x+z)$ y $\mathbf{b}=(m,2m,n,m+n)$ dos vectores de V. Se tendrá:

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(x+m\ ,2x+2m\ ,z+n\ ,x+z+m+n) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}+b\in V$

$\alpha\,.\,a=(\alpha x,2\alpha x\ ,\alpha z\ ,\alpha x+\alpha z) \quad \alpha\in R \quad \Rightarrow \quad \alpha\,.\,\mathbf{a}\in V$

Por tanto V es un subespacio vectorial de R^4.

d) Sean dos vectores de V:

$\mathbf{a}=(a,b,c,d)$ con $2b+3c=0$ (1)

$b=(p,q,r,s)$ con $2q+3r=0$ (2)

se tendrá:

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a+p\ ,b+q\ ,c+r\ ,d+s)$ y como , considerando (1) y (2), se tiene:

$$2(b+q)+3(c+r)=2b+3c+2q+3r=0 \text{ resulta } \mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$$

$\alpha\,.\,\mathbf{a}=(\alpha a\ ,\alpha b\ ,\alpha c,\alpha d)$ y como $2\alpha b+3\alpha c=0$ será $\alpha\,.\,\mathbf{a}\in V$

Por tanto V es un subespacio vectorial de R^4.

e) Sean dos vectores de V:

$\mathbf{a}=(a,b,c,d)$ con $2b+3c=5$ (1)

$b=(p,q,r,s)$ con $2q+3r=5$ (2)

se tendrá:

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=(a+p\ ,b+q\ ,c+r\ ,d+s)$ y como, considerando (1) y (2), se tiene:

$$2(b+q)+3(c+r)=2b+3c+2q+3r=5+5=10$$

de donde resulta $\mathbf{a}+b\notin V$ y por tanto V no es un subespacio vectorial de R^4.

5 *Indicar si cada uno de los siguientes subconjuntos de R^5 definidos a continuación constituye un subespacio de R^5 sobre R. (Se supone $\mathbf{a}=(x,y,z,t,u)$).*

a)	*Todos los*	$\mathbf{a} \in R^5$	*tales que*	$x = 1$
b)	”	”	”	$x = 0$
c)	”	”	”	$x = y$
d)	”	”	”	$x \,.\, y = 0$
e)	”	”	”	$x + y + z + t + u = 0$
f)	”	”	”	$x = y = 0$
g)	”	”	”	$x + y = 1$

SOLUCION

a) No es subespacio vectorial puesto que :
$(1,b,c,d,e) + (1,p,q,r,s) = (2\ ,\ b+p,\ c+q\ ,\ d+r,\ e+s)$ y $2 \neq 1$

b) Es subespacio vectorial.

c) Es subespacio vectorial.

d) No es subespacio vectorial, puesto que:

$$\begin{matrix} \mathbf{a} = (x,y,z,t,u) & \text{con} & x.y = 0 \\ \mathbf{b} = (p,q,r,s,v) & \text{con} & p.q = 0 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = (x+p,y+q,z+r,t+s,u+v)$$

no siendo posible afirmar que se verifique siempre que $(x+p).(q+y) = 0$. (Por ejemplo en los vectores $(1,0,2,3,4)$ y $(0,1,3,5,6)$ no se verifica).

e) Es un subespacio vectorial.

f) Es un subespacio vectorial.

g) No es subespacio vectorial puesto que :

$$\begin{matrix} \mathbf{a} = (x,y,z,t,u) & \text{con } x + y = 1 \\ \mathbf{b} = (p,q,r,s,v) & \text{con } p + q = 1 \end{matrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = (x+p,y+q,z+r,t+s,u+v)$$

siendo $x + p + y + q = (x+y) + (p+q) = 2$

6 *En el espacio vectorial R^4 sobre R se consideran los siguientes conjuntos:*

a) $\{(x,y,z,t) \in R^4 \mid 3x + y = 0\}$

b) $\{(x,y,z,t) \in R^4 \mid x - y = z - t = 0\}$

c) $\{(x,y,z,t) \in R^4 \mid 3y = 1\}$

d) $\{(x,y,z,t) \in R^4 \mid x = 2\ ,\ t = 0\}$

SOLUCION

a) Es subespacio vectorial.

b) Es subespacio vectorial. (La condición equivale a $x = y$, $z = t$).

c) No es subespacio vectorial puesto que el elemento neutro $(0,0,0,0)$ no pertenece a él.

d) No es subespacio vectorial por el mismo motivo.

7 *Probar que el conjunto de aquellos vectores de R^4, de la forma $(a,\ b,\ c,\ d)$, cuyas componentes satisfacen las ecuaciones:*

$$2a - b + c - 4d = 0$$
$$b - c + 2d = 0$$

forman un subespacio vectorial del espacio R^4 sobre R.

SOLUCION

Sea A dicho conjunto de vectores. A no es vacío pues $(0,0,0,0) \in A$.

Sean $(x,y,z,t) \in A$ y $(a,b,c,d) \in A$
$\alpha, \beta \in R$

comprobemos si $\alpha \cdot (x,y,z,t) + \beta \cdot (a,b,c,d)$ pertenece al conjunto A.

Si dicho vector pertenece a A quedará justificado que A es subespacio vectorial.

Se tiene:

$(x,y,z,t) \in A \quad \Rightarrow \quad 2x - y + z + t = 0 \quad , \quad y - z + 2t = 0 \quad (1)$

$(a,b,c,d) \in A \quad \Rightarrow \quad 2a - b + c + d = 0 \quad , \quad b - c + 2d = 0 \quad (2)$

$\alpha.(x,y,z,t) + \beta.(a,b,c,d) = (\alpha x+\beta a , \alpha y +\beta b , \alpha z+\beta c , \alpha t+\beta d)$

$$2(\alpha x + \beta a) - (\alpha y+\beta b) + (\alpha z +\beta c) + (\alpha t+\beta d) = 0$$
$$(\alpha y +\beta b) - (\alpha z+\beta c) + 2(\alpha t+\beta d) = 0$$

teniendo en cuenta (1) y (2).

Por tanto $\alpha (x,y,z,t) + \beta(a,b,c,d)$ pertenece a A que, por tanto, será un subespacio de R^4.

8 *Sean F y G dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial E sobre un cuerpo R. Sea a un vector arbitrario de F y* **b** *un vector genérico de G. Demostrar que el conjunto de los elementos de E de la forma a* **a + b** *constituye un subespacio vectorial de E.*

SOLUCION

Sea S dicho conjunto de vectores. S no es vacío pues $(0,0,0,0) \in S$, por ser $(0,0,0,0)$ la suma de un vector de F, $(0,0,0,0)$, y un vector de G, $(0,0,0,0)$.

Sean dos vectores **x** e **y** de S. Será:

$\mathbf{x} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ con $\mathbf{a} \in F$, $\mathbf{b} \in G$

$\mathbf{y} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$ con $\mathbf{c} \in F$, $\mathbf{d} \in G$

y por tanto $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = (\mathbf{a}+\mathbf{c}) +(\mathbf{b}+\mathbf{d})$ con $\mathbf{a}+\mathbf{c} \in F$ y $\mathbf{b}+\mathbf{d} \in G$.

Se tendrá pues que $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es un elemento del conjunto S.

Analogamente se comprueba que si $\mathbf{x} \in S$ también $\alpha \cdot \mathbf{x} \in S$ y, en consecuencia, S , es un subespacio vectorial del espacio vectorial E.

9 *¿Cuál es el subespacio de R^4 engendrado por los vectores* $\mathbf{a} = (1,-1,0,0)$, $b = (1,1,0,1)$, $\mathbf{c} = (2,0,1,1)$?

SOLUCION

El subespacio S engendrado por **a** , **b** , **c** :

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \mid (x,y,z,t) = \alpha(1,-1,0,0) + \beta(1,1,0,1) + \gamma(2,0,1,1), \alpha,\beta,\gamma \in R \right\}$$

está formado por las combinaciones lineales de los dados.

Los elementos de S podrán expresarse del siguiente modo:

$$(x,y,z,t) = (\alpha + \beta + 2\gamma , -\alpha + \beta , \gamma , \beta + \gamma)$$

o bien

$$x = \alpha + \beta + 2\gamma$$

$$\begin{cases} y = -\alpha + \beta \\ z = \gamma \\ t = \beta + \gamma \end{cases}$$

Dando valores a α, β , γ obtendremos todos los vectores de S.

Si entre las ecuaciones anteriores eliminamos α, β , γ obtendremos las expresiones analíticas, cartesianas o implícitas del subespacio.

La tercera ecuación nos dice que $z = \gamma$. De acuerdo con ella, la cuarta nos dice:

$$\beta = t - z$$

de donde se obtendrá de la segunda: $\alpha = t - z - y$

y finalmente, sustituyendo estos resultados en la primera ecuación, se obtiene:

$$x + y - 2t = 0$$

Así pues:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R_4 \mid x + y - 2t = 0 \right\}$$

10 *Se dan tres vectores del espacio vectorial R^4 sobre R*

$\mathbf{a} = (0,1,2,3)$, $\mathbf{b} = (-1,1,2,-2)$, $\mathbf{c} = (-2,-1,1,2)$

los cuales generan un subespacio de R^4. Caracterizar los vectores $\mathbf{v} = (x,y,z,t)$ pertenecientes a este subespacio.

Resolver la misma cuestión con los vectores

$\mathbf{w} = (1,2,3,0)$, $\mathbf{u} = (-1,1,2,-2)$, $\mathbf{n} = (3,0,-1,4)$

SOLUCION

a) Sea S el subespacio engendrado por a , **b** y c. Será:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \mid (x,y,z,t) = \alpha(0,1,2,3) + \beta(-1,1,2,-2) + \gamma(-2,-1,1,2),\ \alpha,\beta,\gamma \in R \right\}$$

lo que nos permitirá escribir:

$$\begin{cases} x = \quad -\beta - 2\gamma \\ y = \alpha + \beta - \gamma \\ z = 2\alpha + 2\beta + \gamma \\ t = 3\alpha - 2\beta + 2\gamma \end{cases}$$

que es la expresión paramétrica del subespacio S.

Eliminado α, β y γ entre las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$5x - 7y + 5z - t = 0$$

y por tanto se puede escribir finalmente:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \mid 5x - 7y + 5z - t = 0 \right\}$$

b) Sea S el subespacio engendrado por **w** , **u** , **n**. Será:

$$S = \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \mid (x,y,z,t) = \alpha(1,2,3,0) + \beta(-1,1,2,-2) + \gamma(3,0,-1,4),\ \alpha,\beta,\gamma \in R \right\}$$

y al expresión paramétrica de S vendrá dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta + 3\gamma \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha + 2\beta - \gamma \\ t = \quad -2\beta + 4\gamma \end{cases}$$

Para obtener la expresión cartesiana de S debemos eliminar los parámetros entre ellas

y y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha - \beta + 3\gamma \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3\alpha + 2\beta - \gamma \\ t = \quad -2\beta + 4\beta \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \alpha = x + \beta - 3\gamma \\ \left\{\begin{array}{l} y = 2(x + \beta - 3\gamma) + \beta \\ z = 3(x + \beta - 3\gamma) + 2\beta - \gamma \\ t = -2\beta + 4\gamma \end{array}\right. \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} y = 2x + 3\beta - 6\gamma \\ z = 3x + 5\beta - 10\gamma \\ t = \quad -2\beta + 4\gamma \end{array}\right.$$

$$\beta = \frac{y - 2x + 6\gamma}{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} z = 3x + 5\,\dfrac{y - 2x + 6\gamma}{3} - 10\gamma \\ \\ t = -2\,\dfrac{y - 2x + 6\gamma}{3} + 4\gamma \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 3z = 9x + 5y - 10x + 30\gamma - 30\gamma \\ \\ 3t = -2y + 4x - 12\gamma + 12\gamma \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x - 5y + 3z = 0 \\ 4x - 2y - 3t = 0 \end{array}\right.$$

(las ecuaciones cartesianas que definen S no están unívocamente determinadas).

11 *Determinar λ y ρ de manera que el vector $(\lambda, \rho, -37, -3)$ pertenezca al subespacio de R^4 engendrado por los vectores $(1,2,-5,3)$ y $(2,-1,4,7)$.*

SOLUCION

El vector debe ser combinación lineal de los vectores: $(1,2,-5,3)$ y $(2,-1,4,7)$. O sea:

$(\lambda, \rho, -37, -3) = \alpha(1,2,-5,3) + \beta(2,-1,4,7)$

es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \alpha + 2\beta \\ \rho = 2\alpha - \beta \\ -37 = -5\alpha + 4\beta \\ -3 = 3\alpha + 7\beta \end{array}\right.$$

Del sistema formado por las dos últimas ecuaciones se obtiene para α y β :

$$\alpha\, x \qquad \alpha = \frac{247}{47} \quad , \qquad \beta = -\frac{126}{47}$$

valores que sustituidos en las dos primeras ecuaciones nos dan los de λ y ρ :

$$\lambda = \frac{247}{47} + 2\left(-\frac{126}{47}\right) = -\frac{5}{47} \qquad \rho = 2 \cdot \frac{247}{47} - \left(-\frac{126}{47}\right) = \frac{620}{47}$$

12 *En R^3, buscar si el vector* $\mathbf{a} = (3,3,3)$ *pertenece al subespacio engendrado por los vectores:*

$\mathbf{v} = (1,-1,2)$ *y* $\mathbf{w} = (2,1,3)$

y, en caso afirmativo, hallar los escalares x e y tales que $\mathbf{a} = x \cdot \mathbf{v} + y \cdot \mathbf{w}$

SOLUCION

Deberá ser:

$$(3,3,3) = x\,(1,-1,2) + y\,(2,1,3)$$

es decir:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ -x + y = 3 \end{array}\right.$$

$2x + 3y = 3$

De las dos primeras ecuaciones se deducen los siguientes valores:

$x = -1 \qquad y = 2$

que no verifican la tercera ecuación puesto que:

$2\,(-1) + 3\,.\,2 \neq 3$

por lo que no es posible expresar **a** como combinación lineal de **v** y **w**.

13 *Indicar si el subespacio de R^4 engendrado por los vectores* **a** $= (1,2,-5,2)$ *y* **b** $= (1,2,3,1)$ *contiene al vector* **x** $= (2,14,-34,7)$.

SOLUCION

Deberá ser:

$$(2,14,-34,7) = h\,(1,2,-5,2) + k\,(1,2,3,1)$$

que equivale al sistema:

$$\left\{\begin{array}{rl} h + k = & 2 \\ 2h + 2k = & 14 \\ -5h + 3k = & -34 \\ 2h + k = & 7 \end{array}\right.$$

Tomando las dos primeras ecuaciones y simplificando la segunda se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{l} h + k = 2 \\ 2h + 2k = 14 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} h + k = 2 \\ h + k = 7 \end{array}\right.$$

sistema que no puede tener soluciones. Luego **x** no pertenece al subespacio engendrado por **a** y **b**.

14 *En el espacio R^3 se dan los vectores:*

a $= (1,2,3)$, **b** $= (2,-1,1)$, **c** $= (1,0,1)$, **d** $= (0,1,1)$

Demostrar que el subespacio engendrado por los vectores **a** *y* **b** *es el mismo que el engendrado por los vectores* **c** *y* **d**.

SOLUCION

Sea F el subespacio engendrado por **a** y **b**.

Sea G el subespacio engendrado por **c** y **d**.

Como
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = \mathbf{c} + 2\mathbf{d} \\ \mathbf{b} = 2\mathbf{c} - \mathbf{d} \end{array}\right\} (1)$$

todo vector que sea combinación lineal de **a** y **b** será combinación lineal de **c** y **d**. Es decir:

$$F \subset G$$

Como de (1), despejando **c** y **d** se obtiene:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{5} + \frac{2\mathbf{b}}{5}$$

$$d = \frac{2a}{5} - \frac{b}{5}$$

todo vector que sea combinación lineal de **c** y **d** será combinación lineal de **a** y **b**. Es decir:

$$G \subset F$$

de donde se deduce la igualdad de ambos subespacios.

15 ***Dados tres vectores* u, v, w *de un espacio vectorial E sobre un cuerpo K, ¿cuál es la condición que debe cumplirse para que el subespacio engendrado por* u *y* v *sea el mismo que el engendrado por* u *y* w *?*.**

SOLUCION

Sean S y T los subespacios engendrados, respectivamente, por $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ y $(\mathbf{u},\mathbf{w})$.

$S = T \quad \Leftrightarrow \quad S \subset T \;\text{ y }\; T \subset S$

$S \subset T \quad \Rightarrow$ todo vector de S es también un vector de T

como $\mathbf{v} \in S$ $\mathbf{v}$ debe ser combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$

$$\mathbf{v} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{w} \qquad (1)$$

$T \subset S \quad \Rightarrow$ todo vector de T es también un vector de S

como $\mathbf{w} \in T$ $\mathbf{w}$ debe ser combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

$$\mathbf{w} = c \cdot \mathbf{u} + d \cdot \mathbf{v} \qquad (2)$$

Por tanto las condiciones (1) y (2) son necesarias para que $S = T$.

Veamos que son también condiciones suficientes:

$S \subset T$

$\mathbf{x} \in S \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} + \beta(a\mathbf{u} + b\mathbf{w}) \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = (\alpha+\beta a)\mathbf{u} + (\beta b)\mathbf{w}$

$\Rightarrow\; \mathbf{x} \in T$

$T \subset S$

$\mathbf{x} \in T \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + \partial\mathbf{w} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \lambda\mathbf{u} + \partial(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = (\lambda+\partial c)\mathbf{u} + (\partial d)\mathbf{v}$

$\Rightarrow\; \mathbf{x} \in S$

16 ***Sean los vectores* $\mathbf{a} = (1,0,2,4)$, $b = (0,1,9,2)$, $\mathbf{c} = (-4,2,10,-12)$. *Calcular los escalares* α *y* β *tales que* $\mathbf{c} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$.**

SOLUCION

Deberá ser:

$$(-4,2,10,-12) = \alpha\,(1,0,2,4) + \beta\,(0,1,9,2)$$

es decir:

$$\begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 2 \\ 2\alpha + 9\beta = 10 \\ 4\alpha + 2\beta = -12 \end{cases}$$

Evidentemente para que se satisfagan als dos primeras ecuaciones deberá ser:

$$\alpha = -4 \qquad \beta = 2$$

y si estos valores satisfacen a las dos restantes habrá solución del sistema. Como

$$2(-4) + 9 \cdot 2 = -8 + 18 = 10$$
$$4(-4) + 2 \cdot 2 = -16 + 4 = -12$$

los valores de α y β son los valores buscados.

17 ***Dado el espacio vectorial R^3 sobre R, determinar cuáles de los siguientes sistemas de vectores son linealmente independientes:***

a) $\{(0,0,0),(1,1,1)\}$
b) $\{(1,-2,3),(3,-6,9)\}$
c) $\{(1,-2,3),(3,2,1)\}$
d) $\{(0,1,-2), (1,-1,1), (1,2,1)\}$
e) $\{(0,2,-4), (1,-2,1), (1,-4,3)\}$
f) $\{(1,-1,-1), (2,3,1), (-1,4,2), (3,10,8)\}$

SOLUCION

a) Es linealmente dependiente por contener el vector (0,0,0).

b) Es linealmente dependiente puesto que: $(3,-6,9) = 3 \cdot (1,-2,3)$

c) Veamos si es linealmente independiente. Debe ser:

$$\alpha(1,-2,3) + \beta(3,2,1) = (0,0,0) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \beta = 0$$

Esta condición equivale al sistema :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

que debemos resolver:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -3\beta \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -3\beta \\ 6\beta + 2\beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -3\beta \\ \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Así pues los vectores son linealmente independientes.

d) Para ver si son linealmente dependientes o independientes hemos de ver si

$$\alpha(0,1,-2) + \beta(1,-1,1) + \gamma(1,2,1) = (0,0,0) \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Esta condición equivaleal sistema:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Por tanto los vectores son linealmente independientes.

e) Son linealmente independientes.

f) Comprobar si son linealmente independientes da lugar al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma + 3\lambda = 0 \\ 5\beta + 3\gamma + 13\lambda = 0 \\ 3\beta + \gamma + 11\lambda = 0 \end{cases}$$

para cuya resolución aplicaremos el método de reducción:

$$\begin{cases} \alpha+2\beta-\gamma+3\lambda=0 \\ 15\beta+9\gamma+39\gamma=0 \\ 15\beta+5\gamma+55\lambda+0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+2\beta-\gamma+3\lambda=0 \\ 15\beta+9\gamma+39\lambda=0 \\ -4\gamma+16\lambda=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha+2\beta-\gamma+3\lambda=0 \\ 15\beta+9\gamma+39\lambda=0 \\ \gamma=4\lambda \end{cases}$$

y de aquí:

$$\gamma = 4\lambda \quad , \quad \beta = -5\lambda \quad , \quad \alpha = 11\lambda$$

lo que nos dice que los vectores son linealmente dependientes ya que basta tomar, por ejemplo, $\lambda = 1$, $\alpha = 11$, $\beta = -5$, $\gamma = 4$, para tener una combinación lineal igualada a 0 sin que los coeficientes sean necesariamente nulos.

18 *Comprobar que son linealmente independientes los siguientes vectores de R^3:*

$$\mathbf{a} = (1,0,2) \quad ; \quad \mathbf{b} = (-1,1,2) \quad ; \quad \mathbf{c} = (0,2,-3)$$

SOLUCION

Comprobar si son linealmente independientes da lugar al sistema:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 2\beta - 3\gamma = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

19 *Averiguar qué valores de $a \in R$ hace linealmente dependientes a los vectores de R^3 siguientes:*

$$\mathbf{v} = (1,1,a) \quad , \quad \mathbf{w} = (2,1,a) \quad , \quad \mathbf{u} = (0,1,1)$$

SOLUCION

Para que sean linealmente dependientes la igualdad

$$\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w} + \rho\,\mathbf{u} = 0$$

no debe implicar $\lambda = \mu = \rho = 0$.

La condición es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \rho = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \\ a\lambda + a\mu + \rho = 0 \end{cases}$$

Resolvámoslo

$$\begin{cases} \lambda = -2\mu \\ -2\mu + \mu + \rho = 0 \\ a(-2\mu) + a\mu + \rho = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\mu + \rho = 0 \\ -a\mu + \rho = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = \rho \\ -a\rho + \rho = 0 \end{cases}$$

$$\rho(1-a) = 0 \quad \begin{cases} \text{si } 1-a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \text{si } 1-a = 0 \quad \text{puede ser } \rho \neq 0, \mu \neq 0, \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Así pues para que sean linealmente dependientes debe ser $a = 1$.

20 *Determinar a y b de manera que los vectores $(3,-2,-1,3),(1,0,2,4),(1,-3,a,b)$ sean lineal-*

mente dependientes.
El mismo problema con los vectores: (1,2,a,1) , (a,1,2,3) , (0,1,b,0)
Indicar en cada caso la relación de dependencia.

SOLCUION

a) Serán linealmente dependientes si existen α y β tales que:

$$(1,-3,a,b) = \alpha\,(3,-2,-1,3) + \beta\,(1,0,2,4)$$

lo que nos da el sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 1 \\ -2\alpha = -3 \\ -\alpha + 2\beta = a \\ 3\alpha + 4\beta = b \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{7}{2}$$

Partiendo de estos valores de α y β obtenemos de las dos últimas ecuaciones:

$$a = -\frac{17}{2} \quad , \quad b = -\frac{19}{2}$$

que son los valores de a y b deseados. La relación de dependencia será pues:

$$(1,-3,-\frac{17}{2},-\frac{19}{2}) = \frac{3}{2}\,(3,-2,-1,3) - \frac{7}{2}\,(1,0,2,4)$$

b) Se obtiene en este caso el sistema:

$$\begin{cases} 1 = \alpha a \\ 2 = \alpha + \beta \\ a = 2\alpha + \beta\, b \\ 1 = 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{3} \ , \ \beta = \frac{5}{3}, \quad a = 3 \quad , \quad b = \frac{7}{5}$$

Siendo la relación de dependencia:

$$(1,2,3,1) = \frac{1}{3}\,(3,1,2,3) + \frac{5}{3}\,(0,1,\frac{7}{5}\ ,\ 0)$$

21 ***Demostrar que los vectores a = (x,y), b = (z,t) de R^2 son linealmente dependientes si y solo si se verifica:***

$$x\,.\,t - y\,.\,z = 0$$

SOLUCION

La condición es necesaria: a y b dependientes $\Rightarrow$ $x.t - y.z = 0$

En efecto:

a y b dependientes $\Rightarrow$ existe λ tal que $a = \lambda\, b$ esto es:

$(x,y) = \lambda\,(z,t)$ $\Rightarrow$ $x = \lambda z$, $y = \lambda t$ de donde se obtiene, eliminando λ entre ambas ecuaciones:

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{t} \quad \Rightarrow \quad x.t = y.z \quad \Longleftrightarrow \quad x.t - y.z = 0$$

La condición es suficiente: Si $x.t - y.z = 0$ los vectores a y b son linealmente dependientes.

En efecto:

$$x.t - y.z = 0 \quad \Rightarrow \quad xt = yz \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{z} = \frac{y}{t} \quad \Rightarrow$$ (llamando λ a la razón común)

$$\lambda = \frac{x}{z} \ , \ \lambda = \frac{y}{t} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda z \\ y = \lambda t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x\ ,\ y) = (\lambda z\ ,\ \lambda t) = \lambda(z\ ,\ t) \quad \Rightarrow \mathbf{a} = \lambda\, \mathbf{b}$$

es decir, **a** y **b** son linealmente dependientes.

22 *Dados el espacio vectorial R^3 sobre R y el conjunto de vectores de R^3:*

$$S = \{ (1,2,1),(2,3,2),(3,2,3),(1,1,1) \}$$

hallar en S un conjunto máximo de vectores linealmente independientes, T, y expresar los restantes vectores como combinación lineal de los elementos de T.

SOLUCION

El vector (1,2,1) es linealmente independiente por ser distinto del vector (0,0,0).

Los vectores (1,2,1) y (2,3,2) son linealmente independientes ya que no existe un número real que multiplicado por uno de ellos nos dé el otro.

Veamos si los vectores (1,2,1),(2,3,2) y (3,2,3) son linealmente independientes.

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta = -3\gamma \\ 2\alpha + 3\beta = -2\gamma \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene: $\alpha = 5\gamma$, $\beta = -4\gamma$ y por tanto los vectores considerados son linealmente dependientes.

Veamos si los vectores (1,2,1),(2,3,2),(1,1,1) son linealmente independientes.

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta \qquad = 0 \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene: $\alpha = \gamma = -\beta$ y por tanto los vectores considerados son linealmente dependientes.

Por tanto el conjunto T buscado es $T = \{(1,2,1),(2,3,2)\}$.

De acuerdo con las soluciones de los sistemas anteriores resulta:

$$5(1,2,1) - 4(2,3,2) + (3,2,3) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad (3,2,3) = -5(1,2,1) + 4(2,3,2)$$

$$-1(1,2,1) + 1(2,3,2) + (-1)(1,1,1) = (0,0,0) \ \Rightarrow\ (1,1,1) = (2,3,2) - (1,2,1)$$

que expresan los vectores (3,2,3) y (1,1,1) como combinación lineal de los elementos de T.

23 ***Demostrar que si tres vectores de R^3 son linealmente independientes, los vectores que resultan de sumarlos dos a dos también lo son.***

SOLUCION

Sean **a** , **b** , **c** linealmente independientes.

Consideremos los vectores : **a + b** , **a + c** , **b + c** .

Para demostrar que estos vectores son linealmente independientes planteemos la igualdad

$$\alpha (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \beta (\mathbf{a} + \mathbf{c}) + \gamma(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

que por las propiedades de espacio vectorial puede escribirse en la forma:

$$(\alpha + \beta) \mathbf{a} + (\alpha + \gamma) \mathbf{b} + (\beta + \gamma) \mathbf{c} = \mathbf{0}$$

Pero como **a**, **b** , **c** son linealmente independientes, esta igualdad implica:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

sistema que a su vez implica: $\alpha = \beta = \gamma = 0$, lo que nos dice que los vectores **a** ,+ **b** , **a** + **c**, **b** + **c** , son linealmente independientes.

Obsérvese que en la demostración no ha intervenido para nada el hecho de que el espacio vectorial fuera R^3 por lo que la propiedad demostrada es válida en cualquier espacio vectorial sobre R.

24 *Demostrar que si en un espacio vectorial E sobre R, los cevtores* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ *son linealmente independientes, también lo son los vectores:*

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \ , \ \mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \ , \ \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 , \dots , \mathbf{b}_n = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n$$

SOLUCION

Planteemos la igualdad:

$$\mu_1 \mathbf{b}_1 + \mu_2 \mathbf{b}_2 + \mu_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \mu_n \mathbf{b}_n = \mathbf{0}$$

que equivale a:

$$\mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mu_3 (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) + \dots + \mu_n (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) = \mathbf{0}$$

la cual por las propiedades de espacio vectorial podrá escribirse en la forma

$$(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \mathbf{a}_1 + (\mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n) \mathbf{a}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

y de la que, teniendo en cuenta que los vectores $\mathbf{a}_i$ son linealmente independientes, deducimos que:

$$\left.\begin{array}{r} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots\dots + \mu_n = 0 \\ \mu_2 + \mu_3 + \dots\dots + \mu_n = 0 \\ \mu_3 + \dots\dots + \mu_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_n = 0 \end{array}\right\}$$

sistema cuyas soluciones son : $\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0$, lo que nos indica la independencia lineal de los vectores $\mathbf{b}_i$.

25 *Demostrar que los vectores (1,0,0),(0,2,0), (0,0,−1) forman una base de* R^3.

SOLUCION

a) Son linealmente independientes.

b) Cualquier vector $(a,b,c) \in R^3$ puede expresarse como combinación lineal de los dados:

$$(a,b,c) = a\,(1,0,0) + \frac{b}{2}\,(0,2,0) - c\,(0,0,-1)$$

26 *Dado el vector* $\mathbf{v} \in R^3$ *y la base del ejercicio anterior sabemos que es:*

$$\mathbf{v} = 5 \,.\, (1,0,0) + 3 \,.\, (0,2,0) - 4 \,.\, (0,0,-1)$$

Se pide hallar las componentes del vector* $\mathbf{v}$ *en la base obtenida sumando dos a dos los elementos de la base dada.

SOLUCION

La nueva base está constituida por los vectores: (1,2,0), (0,2,–1), (1,0,–1).

Si llamamos α, β, γ a las componentes de $\mathbf{v}$ en esta base se verificará:

$$\mathbf{v} = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,2,-1) + \gamma\,(1,0,-1)$$

es decir:

$$5\,(1,0,0) + 3(0,2,0) - 4\,(0,0,-1) = \alpha\,(1,2,0) + \beta\,(0,2,-1) + \gamma\,(1,0,-1)$$

Pero teniendo en cuenta cómo se han obtenido los vectores de la nueva base, resulta:

$$5(1,0,0)+3(0,2,0)-4(0,0,-1)=\alpha[(1,0,0)+(0,2,0)]+\beta[(0,2,0)+(0,0,-1)]+\gamma[(0,0,-1)+(1,0,0)]$$

que nos permite escribir:

$$\begin{cases} 5 = \alpha + \gamma \\ 3 = \alpha + \beta \\ -4 = \beta + \gamma \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son: $\alpha = 6$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$ y son las componentes solicitadas.

27 *Sea E un espacio vectorial sobre R. Sea* $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ *una base de E. Se pide:*

a) *Demostrar que los vectores* $\mathbf{z} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ *y* $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ *constituyen una base de E.*

b) *Descomponer el vector* $\mathbf{v} = 3\mathbf{u} - 5\mathbf{w}$ *en la base formada por los vectores* $\mathbf{z}$ *y* $\mathbf{t}$.

SOLUCION

a) Son una base puesto que son linealmente independientes (Corolario 6.3).

$$\alpha\mathbf{z} + \beta\mathbf{t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha + \beta)\,\mathbf{u} + (\alpha - \beta)\,\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

b) Llamemos a y b a las componentes del vector $\mathbf{v}$ en la nueva base. Tendremos:

$$\mathbf{v} = \mathrm{a}\,\mathbf{z} + \mathrm{b}\,\mathbf{t} = \mathrm{a}\,(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (\mathbf{u} - \mathbf{w})\,\mathrm{b} = (\mathrm{a} + \mathrm{b})\,\mathbf{u} + (\mathrm{a} - \mathrm{b})\,\mathbf{w} = 3\,\mathbf{u} - 5\,\mathbf{w}$$

y obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 3 = \mathrm{a} + \mathrm{b} \\ -5 = \mathrm{a} - \mathrm{b} \end{cases}$$

cuyas soluciones son: $\mathrm{a} = -1$, $\mathrm{b} = 4$.

Así pues es : $\mathbf{v} = (-1)\,\mathbf{z} + 4\,\mathbf{t}$

28 *Dado el espacio vectorial C sobre R (C es el conjunto de los números complejos) demostrar*

1) $\{1, i\}$ *es una base .*

2) $\{a + bi, c + di\}$ *es una base si* $a \,.\, d - b \,.\, c \neq 0$.

SOLUCION

1) Como $\alpha \,.\, 1 + \beta \,.\, \mathrm{i} = 0$ implica $\alpha = \beta = 0$ son linealmente independientes.

Por otra parte se tiene para todo elemento $a + bi$ de C :

$$a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$$

Por tanto $\{1, i\}$ es una base de C.

2) Para que $\{a + bi, c + di\}$ sea una base de C dichos vectores deben ser linealmente independientes, y para ello, considerando el resultado del ejercicio 21 , debe verificarse : $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$.

29 *Dados los vectores* $v = (0,1,1)$ *y* $w = (3,2,-5)$ *de* R^3 *se pide:*

a) Demostrar que son linealmente independientes.

b) Hallar otro vector tal que forme con ellos una base de R^3*.*

(Nota: Tómese como base de partida la canónica).

SOLUCION

a) La igualdad

$$\lambda (0,1,1) + \mu (3,2,-5) = (0,0,0)$$

equivale a :

$$\begin{cases} 3\mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \\ \lambda - 5\mu = 0 \end{cases}$$

sistema que implica $\lambda = \mu = 0$, por lo que los dos vectores son linealmente independientes.

b) En la base canónica la expresión de (0,1,1) es :

$$(0,1,1) = 0. (1,0,0) + 1 . (0,1,0) + 1 . (0,0,1)$$

por lo que , según lo visto en la demostración del teorema de Steinitz, se podrán sustituir indistintamente los vectores (0,1,0) ó (0,0,1) por el dado para formar una nueva base.

Sustituyamos, por ejemplo, el segundo, con lo que los vectores

$$\{(1,0,0) , (0,1,1) , (0,0,1)\}$$

forman otra base de R^3. En ella (3,2,–5) puede expresarse como:

$$(3,2,-5) = 3 (1,0,0) + 2 (0,1,1) - 7 (0,0,1)$$

y como antes, cualquiera de los vectores en los que el escalar en esta expresión es distinto de cero, puede ser sustituido por el vector dado. Si escogemos el primero la base pedida puede ser :

$$\{(3,2,-5) , (0,1,1) , (0,0,1)\}$$

30 *Sabiendo que los vectores* $a = (1,0,0,0)$, $b = (0,1,0,0)$, $c = (0,0,1,0)$ *y* $d = (0,0,0,1)$ *constituyen una base de* R^4 *se pide determinar una nueva base del mismo espacio vectorial, de la que una parte esté constituída por una base del subespacio de* R^4 *engendrado por los vectores*

$$u = (2,-2,3,1) \quad , \quad v = (-1,4,-6,2) \quad , \quad w = (1,14,-21,-7)$$

SOLUCION

No presenta dificultad comprobar que los vectores u , v y w son linealmente independientes y por tanto serán una base del subespacio que engendran.

Expresemos el vector u en la base canónica a , b , c , d :

$$(2,-2,3,1) = 2(1,0,0,0) - 2 (0,1,0,0) + 3 (0,0,1,0) + 1 (0,0,0,1)$$

Como todos los escalares son distintos de cero cualquier vector de la base canónica se puede sustituir por el dado para obtener una nueva base. Sustituyendo el primero se tiene:

$$\{(2,-2,3,1)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,\ (0,0,1,0)\ ,\ (0,0,0,1)\}$$

que es otra base del espacio vectorial.

En ella el vector v puede expresarse como:

$$(-1,4,-6,2) = -\frac{1}{2}(2,-2,3,1) + 3(0,1,0,0) + (-\frac{9}{2})(0,0,1,0) + \frac{5}{2}(0,0,0,1)$$

lo que nos permite sustituir el segundo de los vectores de la base canónica para obtener:

$$\{(2,-2,3,1)\ ,\ (-1,4,-6,2),\ (0,0,1,0)\ ,\ (0,0,0,1)\}$$

que es otra base del espacio vectorial.

En ella el vector w puede expresarse como:

$$(1,14,-21,-7) = 3\,(2,-2,3,1) + 5\,(-1,4,-6,2) + 0\,(0,0,1,0) - 20(0,0,0,1)$$

Se pueden sustituir todos menos el (0,0,1,0).

Si queremos mantener u y v en la base deberemos usar para efectuar la sustitución el vector (0,0,0,1), de modo que la base pedida es:

$$\{(2,-2,3,1)\ ,\ (-1,4,-6,2)\ ,\ (0,0,1,0)\ ,\ (1,14,-21,-7)\}$$

31 ***En R^4 se consideran los tres vectores (1,4,−1,10), (6,10,1,0) y (1,2,1,1). Demostrar que son linealmente independientes. Encontrar un vector que, junto con los dados, constituyan una base de R^4. (Se escogerá un vector que tenga el mayor número posible de componentes nulas). En dicha base hallar las componentes del vector a = (−1,5,−2,3).***

SOLUCION

No presenta dificultades comprobar que son linealmente independientes.

Para encontrar una base de la que formen parte los tres vectores dados, como hemos efectuado en el ejercicio anterior, aplicamos la sustitución progresiva a la base canónica.

Puesto que:

$$(1,4,-1,10) = 1\,(1,0,0,0) + 4\,(0,1,0,0) - 1\,(0,0,1,0) + 10\,(0,0,0,1)$$

puede tomarse como base

$$\{(1,4,-1,10)\,,\,(0,1,0,0)\,,\,(0,0,1,0)\,,\,(0,0,0,1)\}$$

En esta base

$$(6,10,1,0) = 6\,(1,4,-1,10) - 14\,(0,1,0,0) + 7\,(0,0,1,0) - 60\,(0,0,0,1)$$

por lo que puede tomarse como nueva base

$$\{(1,4,-1,10)\,,\,(6,10,1,0)\,,\,(0,0,1,0)\,,\,(0,0,0,1)\}$$

en la cual

$$(2,2,1,1) = -\frac{4}{7}\,(1,4,-1,10) + \frac{3}{7}\,(6,10,1,0) + 0\,(0,0,1,0) + \frac{47}{7}\,(0,0,0,1)$$

por lo que definitivamente puede tomarse como base pedida:

$$\{(1,4,-1,10)\,,\,(6,10,1,0)\,,\,(0,0,1,0)\,,\,(2,2,1,1)\}$$

32 ***Hallar las dimensiones de los subespacios considerados en los ejercicios anteriores.***

SOLUCION

En el ejercicio 30 los vectores **u**, **v** y **w** han resultado linealmente independientes y al ser generadores del subespacio todo vector de éste será combinación lineal de ellos.

Dichos vectores forman pues una base del subespacio por lo que la dimensión de éste será 3.

Por razones análogas, en el ejercicio 31 el subespacio engendrado es de dimensión 3.

33 *Demostrar directamente el teorema 7.2.*

SOLUCION

Teorema 7.2.

Dado cualquier subespacio V de dipensión "p" en un espacio de dimensión "n"($p \leqslant n$) podemos encontrar una base $\{e_1, e_2, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ en E de manera que $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ sea una base de V.

En efecto:

Puesto que V es de dimensión p éste es el número de elementos de sus bases. Sea $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ una de ellas.

Los vectores $\{e_1, \ldots, e_p\}$ son linealmente independientes. Si todo $\mathbf{x} \in E$ fuese combinación lineal de ellos, formarían una base de E, $p = n$, y el teorema está demostrado.

Si algún $\mathbf{x} \in E$ no es combinación lineal de ellos, será linealmente independiente con ellos. Designemos por e_{p+1} a un tal vector y consideremos el conjunto $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}\}$

Los vectores $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}\}$ son linealmente independientes.

Si todo $\mathbf{x} \in E$ es combinación lineal de ellos, forman una base de E, $p + 1 = n$, y por tanto el teorema está demostrado.

Si algún $\mathbf{x} \in E$ no es combinación lineal de ellos, será linealmente independiente con ellos. Lo designamos e_{p+2} y consideramos el conjunto $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}\}$.

Los vectores $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, e_{p+2}\}$ son linealmente independientes y el razonamiento puede seguir hasta llegar forzosamente a $p + i = n$ puesto que $p \leqslant n$.

CAPITULO II
Aplicaciones lineales. Matrices

1 *Comprobar si la aplicación* $f: R^4 \longrightarrow R^3$ *definida por* $f(x,y,z,t) = (x-t, y-t, z-t)$ *es lineal.*

SOLUCION

Para que sea lineal debe cumplir:

Al.1 $f[(x,y,z,t) + (x',y',z',t')] = f(x,y,z,t) + f(x',y',z',t')$

Al.2 $f[\lambda(x,y,z,t)] = \lambda f(x,y,z,t)$

Comprobémoslo:

Al.1 $f[(x,y,z,t) + (x',y',z',t')] = f(x+x', y+y', z+z', t+t') =$

$= ((x+x')-(t+t'), (y+y')-(t+t'), (z+z')-(t+t')) =$

$= ((x-t)+(x'-t'), (y-t)+(y'-t'), (z-t)+(z'-t')) =$

$= (x-t, y-t, z-t) + (x'-t', y'-t', z'-t') = f(x,y,z,t) + f(x',y',z',t')$

Al.2 $f[\lambda(x,y,z,t)] = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = (\lambda x-\lambda t, \lambda y-\lambda t, \lambda z-\lambda t) =$

$= (\lambda(x-t), \lambda(y-t), \lambda(z-t)) = \lambda(x-t, y-t, z-t) = \lambda f(x,y,z,t)$

2 *Demostrar que la aplicación* $f: R^2 \longrightarrow R^3$ *definida por* $f(x,y) = (x,y,0)$ *es lineal.*

SOLUCION

Al.1 $f[(a,b) + (c,d)] = f(a+c, b+d) = (a+c, b+d, 0) = (a,b,0) + (c,d,0) = f(a,b) + f(c,d)$

Al.2 $f[\lambda(a,b)] = f(\lambda a, \lambda b) = (\lambda a, \lambda b, 0) = \lambda(a,b,0) = \lambda f(a,b)$

3 *Comprobar si la aplicación* $f: R^3 \longrightarrow R^3$ *tal que* $f(x,y,z) = (x+y, x+z, x+y)$ *es lineal.*

SOLUCION

Al.1 $f[(a,b,c) + (d,e,f)] \text{ x } f(a+d, \gamma+e, c+f) = ((a+d)+(b+e), (a+d)+(c+f), (a+d)+(b+e))$

$= (a+b, a+c, a+b) + (d+e), d+f, d+e) = f(a,b,c) + f(d,e,f)$

Al.2 $f[\lambda(a,b,c)] = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = (\lambda a+\lambda b, \lambda a+\lambda c, \lambda a+\lambda b) = \lambda(a+b, a+c, a+b) = \lambda f(a,b,c)$

4 *¿Es lineal la aplicación* $f: R^5 \longrightarrow R$ *definida por* $f(x,y,z,t,u) = x + y + z + t + u$ *?*

SOLUCION

No presenta dificultades comprobar que se cumplen Al.1 y Al.2 .

5 *Demostrar que la aplicación* $f: R^2 \longrightarrow R$ *definida por* $f(x,y) = x - y + 1$ *no es lineal.*

SOLUCION

No es lineal puesto que no se cumple Al.1. En efecto:

$$f[\,(x,y)+(z,t)\,]=f(x+z\,,\,y+t)=(x+z)-(y+t)+1$$

y en cambio

$$f(x,y)+f(z,t)=(x-y+1)+(z-t+1)=(x+z)-(y+t)+2$$

Podría también haberse comprobado que no se cumple Al.2.

6 *En la aplicación lineal del ejercicio 2 hallar la imagen del subespacio de R^2*

$$V=\{\,(x,y)\in R^2 \mid x+y=0\,\}$$

SO **SOLUCION**

La aplicación del ejercicio 2 es : $f(x,y)=(x,y,0)$, por lo que:

$$f(\,V\,)=\left\{f(x,y)\mid (x,y)\in V\right\}=\left\{\,(x,y,0)\in R^3 \mid x+y=0\right\}=\left\{\,(x,-x,0)\in R^3\,\right\}$$

7 *En la aplicación lineal del ejercicio 2 hallar la antiimagen del subespacio de R^3:*

$$W=\{\,(x,y,z)\in R^3 \mid x+y=0\,,\,z=0\,\}$$

SOLUCION

El conjunto W puede escribirse como $W=\left\{\,(x,-x,\,0)\in R^3\,\right\}$. Tendremos:

$$f^{-1}\,(W)=\left\{\,(x,y)\in R^2 \mid f(x,y)\in W\,\right\}=\left\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y,0)\ \in W\right\}=$$

$$=\left\{(x,y)\in R^2 \mid x+y=0\,\right\}=\left\{\,(x,-x)\in R^2\right\}$$

8 *De las aplicaciones de los ejercicios 1 a 5 que sean lineales, hallar su núcleo.*

SOLUCION

1 $\operatorname{Ker} f=\left\{\,(x,y,z,t)\in R^4 \mid f(x,y,z,t)=(0,0,0)\right\}=\left\{(x,y,z,t)\in R^4 \mid (x-t,y-t,z-t)\right\}=$

$$=\left\{(0,0,0)\right\}\ .$$

Debe pues cumplirse

$$\left\{\begin{array}{l} x-t=0\\ y-t=0\\ z-t=0\end{array}\right. \qquad\Rightarrow\qquad x=y=z=t$$

por lo que $\operatorname{Ker} f=\left\{\,(x,y,z,t)\in R^4 \mid x=y=z=t\,\right\}$

2 $\operatorname{Ker} f=\left\{(x,y)\in R^2 \mid f(x,y)=(0,0,0)\right\}=\left\{(x,y)\in R^2 \mid (x,y,0)=(0,0,0)\right\}$

Debe pues cumplirse que $x=y=0$ y por tanto $\operatorname{Ker} f=\left\{(0,0)\right\}$.

3 Los vectores del Ker f deben cumplir:

$$\left\{\begin{array}{l} x+y=0\\ x+z=0\\ x+y=0\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad y=z=-x \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Ker} f=\left\{\,(x,-x,-x)\in R^3\right\}$$

4 $\operatorname{Ker} f=\left\{\,(x,y,z,t,u)\in R^5 \mid x+y+z+t+u=0\right\}$

9 *Comprobar directamente que si $f\!:\!E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal entre los espacios vec-*

toriales E y F sobre R, Ker f es un subespacio vectorial de E e Im f es un subespacio vectorial de F.

SOLUCION

a) Ker f es un subespacio vectorial de E.

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos elmentos del Ker de la aplicación f. ($f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$).

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \text{Ker } f$$

$$f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha \mathbf{x} \in \text{Ker } f$$

b) Im f es un subespacio vectorial de F.

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos elementos de Im f . ($\mathbf{x} = f(\mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in E$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{b})$, $\mathbf{b} \in E$).

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \text{Im } f$$

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha f(\mathbf{a}) = f(\alpha \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad \alpha \mathbf{x} \in \text{Im } f$$

10 *Demostrar que: "Condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal sea inyectiva es que su núcleo esté formado por el vector* $\mathbf{0}$ *.*

SOLUCION

a) La condición es necesaria: Si f es inyectiva entonces Ker f = $\mathbf{0}$.

En efecto:

Sea $\mathbf{x} \in \ker f \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = f(0) \quad \Rightarrow$ (por ser f inyectiva) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) La condición es suficiente: Si Ker f = $\mathbf{0}$ entonces f es inyectiva

En efecto:

Hay que ver que $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \text{Ker } f \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (Como Ker f = $\mathbf{0}$) $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

11 *Dada la aplicación lineal f:* $R^4 \longrightarrow R^4$ *tal que:*

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0) \longrightarrow (\ 2,-1,-1,0)$$
$$\mathbf{e}_2 = (0,1,0,0) \longrightarrow (-1,\ 1,0,-1)$$
$$\mathbf{e}_3 = (0,0,1,0) \longrightarrow (\ 1,\ 0,1,-1)$$
$$\mathbf{e}_4 = (0,0,0,1) \longrightarrow (\ 0,-1,-1,2)$$

se pide:

a) Hallar la imagen del vector $\mathbf{v} = (2,5,6,8)$

b) Hallar la antiimagen, en caso de que exista, de los vectores $\mathbf{a} = (0,-2,-4,4)$ *y* $\mathbf{b} = (1,0,0,1)$

c) Hallar la dimensión del espacio imagen, es decir, el rango de f.

d) Indicar los elementos del núcleo de f. ¿Pertenece el vector $\mathbf{z} = (1,2,3,4)$ *al núcleo?*

SOLUCION

a) La matriz de la aplicación lineal es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que la imagen de (2,5,6,8) se obtendrá así:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

o sea, el vector (5, –5, –4, 5).

b) Para hallar la antiimagen (x,y,z,t) de (0,2,–4,4) planteamos

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

que da lugar al sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ -x + y - t = 2 \\ -x + z - t = -4 \\ -y - z + 2t = 4 \end{array}\right.$$

cuyas soluciones pueden expresarse de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -2 + \lambda \\ t = 1 + \lambda \end{array}\right.$$

por lo que existen muchos vectores antiimagen del vector (0,2,–4,4), para cada valor de λ, se obtiene un vector distinto: (1,0,–2,1), (1,1,–1,2),. . . . .

De igual manera puede procederse para hallar la antiimagen de (1,0,0,1). Obtenemos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ -x + y - t = 0 \\ -x + z - t = 0 \\ -y - z + 2t = 0 \end{array}\right.$$

$$z = 1 - 2x + y \qquad \left\{\begin{array}{l} -x + y - t = 0 \\ -3x + y - t = -1 \\ 2x - 2y + 2t = 1 \end{array}\right. \qquad y = x + t \qquad \left\{\begin{array}{l} -2x = -1 \\ 0 = 1 \end{array}\right.$$

Siendo imposible que se verifique la igualdad $0 = 1$ el sistema no tendrá solución, es decir, el vector dado no tiene antiimagen.

c) Hemos de mirar cuántos de los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$ son linealmente independientes, pues el espacio imagen está engendrado por ellos.

Se comprueba que los vectores $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ son linealmente independientes. La dimensión de la imagen será, en consecuencia, 3.

d) Determinar los elementos del núcleo da lugar al sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ -x + y - t = 0 \\ -x + z - t = 0 \\ -y - z + 2t = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} z = y - 2x \\ -x + y - t = 0 \\ -3x + y - t = 0 \\ 2x - 2y + 2t = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} y = x + t \\ -2x = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

Este último sistema implica $x = 0$, pero t puede ser cualquiera, así las soluciones del sistema serán:

$x = 0 \quad , \quad y = z = t = \lambda$

Así los elementos del núcleo serán de la forma $(0,\lambda,\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in R$.

En consecuencia el vector $(1,2,3,4)$ no pertenece al núcleo.

12 *Una aplicación lineal de R^3 en R^3 está definida por*

$$(1,0,0) \longrightarrow (1,2,0)$$
$$(0,1,0) \longrightarrow (0,2,0)$$
$$(0,0,1) \longrightarrow (1,0,1)$$

referidas las componentes a las bases canónicas. Se pide:

a) Matriz de la aplicación f.

b) Imagen del vector $\mathbf{v} = (3,2)$

c) Núcleo de la aplicación.

d) Vectores $\mathbf{x} \in R^3$ *tales que* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

e) Vectores $\mathbf{x} \in R^3$ *tales que* $f(\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x}$ *para algún* $\lambda \in R$.

SOLUCION

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $f(\mathbf{v}) = (4,10,1)$

c) Para hallar el núcleo de la aplicación debe resolverse el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} x + z &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0$$

Así pues el único vector del núcleo es el $(0,0,0)$.

d) Serán aquellos que verifiquen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x + z &= x \\ 2x + 2y &= y \\ z &= z \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} z &= 0 \\ y &= -2x \end{aligned} \right.$$

es decir, son los vectores de la forma $(\mu, -2\mu, 0)$ siendo μ cualquier valor de R.

e) Serán aquellos que verifiquen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x + z &= \lambda x \\ 2x + 2y &= \lambda y \\ z &= \lambda z \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} (1-\lambda)x + z &= 0 \\ 2x + (2-\lambda)y &= 0 \\ (1-\lambda)z &= 0 \end{aligned} \right.$$

Consideremos los casos especiales de λ que pueden impedir despejar alguna incógnita y que son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$ puesto que originan coeficientes nulos.

Si $\lambda = 1$ estamos en el apartado d) ya estudiado: $\mathbf{x} = (\mu, -2\mu, 0)$.

Si $\lambda = 2$ resulta el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} -x + z &= 0 \\ 2x &= 0 \\ -z &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad x = z = 0 \ , \ y = \mu$$

siendo por tanto los vectores de la forma $(0, \mu, 0)$.

Finalmente si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 2$ el sistema tiene como única solución $x = y = z = 0$, y en consecuencia el único vector que cumple la condcición es el $(0,0,0)$.

13 *Hallar el núcleo y el rango de la aplicación lineal* $f: R^3 \longrightarrow R^4$ *que en la base canó-*

nica tiene como matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y hallar el vector transformado del (5,3,−2).

SOLUCION

Dado que el sistema

$$\left\{ \begin{aligned} x + 3z &= 0 \\ x + \ \ y &= 0 \\ x + \ \ y &= 0 \\ x + y + 3z &= 0 \end{aligned} \right.$$

tiene como solución $x = y = z = 0$, el núcleo de f está formado por el vector (0,0,0).

Los vectores (1,1,1,1), (0,1,1,1) y (3,0,0,3), por ser linealmente independientes, constituyen una base de la imagen de la aplicación y por tanto:

$$\text{Im } f = \left\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \alpha(1,1,1,1) + \beta(0,1,0,1) + \gamma(3,0,0,3) \right\} =$$
$$= \left\{ (x,y,z,t) \in R^4 \mid x=\alpha+3\gamma ,\ y=\alpha+\beta ,\ z=\alpha+\beta ,\ t=\alpha+\beta+3\gamma ,\ \ \alpha,\beta,\gamma \in R \right\}$$

El vector transformado del (5,3,−2) será el vector (−1,8,8,2).

14) *En una aplicación lineal f' $f\colon R^3 \longrightarrow R^3$ se tiene:*

(0,1,0) $\longrightarrow$ (0,2,0)
(1,0,0) $\longrightarrow$ (1,2,0)

Hallar el transformado del vector (0,0,1) sabiendo que el vector (1,1,1) pertenece al núcleo de f. Hallar la matriz de f en la base canónica.

SOLUCION

$$f(1,1,1) = f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(1,2,0) + (0,2,0) + f(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$f(0,0,1) = (-1,-4,0)$$

y la matriz de f en la base canónica será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15) *Hallar una base del espacio imagen de la aplicación lineal $f\colon R^3 \longrightarrow R^3$ que en las bases canónicas tiene por matriz:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

El espacio imagen está generado por los vectores (2,1,2), (6,3,6) y (0,1,1).

Resulta evidente que el vector (6,3,6) es combinación lineal de los otros dos puesto que: $(6,3,6) = 3\,(2,1,2) + 0\,(0,1,1)$.

La base estará formada por los vectores (2,1,2) y (0,1,1) que son linealmente independientes.

16 *Determinar respecto de las bases canónicas, la matriz de la aplicación lineal $f: R^2 \longrightarrow R^3$ tal que los vectores $\mathbf{v} = (1,-1)$, $\mathbf{w} = (2,-3)$ tienen como imágenes los vectores $f(\mathbf{v}) = (-1,-2,-5)$, $f(\mathbf{w}) = (0,5,4)$.*

SOLUCION

Expresemos en la base dada los vectores de la base canónica $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ -a - 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3\ ,\ b = -1 \qquad \begin{cases} c + 2d = 0 \\ -c - 3d = 1 \end{cases} \quad c = 2\ ,\ d = -1$$

$$\mathbf{u}_1 = 3\,\mathbf{v} - 1\,\mathbf{w} \qquad\qquad \mathbf{u}_2 = 2\,\mathbf{v} - 1\,\mathbf{w}$$

Por las propiedades de las aplicaciones lineales tendremos:

$$f(\mathbf{u}_1) = f(3\,\mathbf{v} - 1\,\mathbf{w}) = 3\,f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = 3\,(-1,-2,-5) - (0,5,4) = (-3,-11,-19)$$

$$f(\mathbf{u}_2) = f(2\,\mathbf{v} - 1\,\mathbf{w}) = 2\,f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w}) = 2\,(-1,-2,-5) - (0,5,4) = (-2,\ -9,-14)$$

y por tanto la matriz de f será:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -11 & -9 \\ -19 & -14 \end{pmatrix}$$

17 *Determinar, respecto de las bases canónicas, la matriz de la aplicación lineal $f: R^4 \longrightarrow R^2$ tal que:*

$$\begin{aligned} (\ 1,\ 2,-1,-3) &\longrightarrow (\ -5,\ 6) \\ (-3,-1,\ 0,\ 5) &\longrightarrow (\ 8,\ 4) \\ (\ 4,\ 2,\ 5,\ 0) &\longrightarrow (\ 10,-6) \\ (-3,-2,\ 1,\ 7) &\longrightarrow (\ 13,\ 0) \end{aligned}$$

SOLUCION

La matriz será de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta los vectores del enunciado y sus correspondientes imágenes resultan los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + 2b - c - 3d = 5 \\ -3a - b + 5d = 8 \\ 4a + 2b + 5c = 10 \\ -3a - 2b + c + 7d = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} e + 2f - g - 3h = 6 \\ -3e - f + 5h = 4 \\ 4e + 2f + 5g = -6 \\ -3e - 2f + g = 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son:

$a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 3$ $\qquad$ $e = -1$, $f = 4$, $g = -2$, $h = 1$

con lo que la matriz buscada es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

18 *Sea $f: R^3 \longrightarrow R^3$ una aplicación lineal tal que:*

(1,0,1) ⟶ (1,1,1)
(0,1,0) ⟶ (1,2,1)
(0,0,1) ⟶ (2,3,2)

a) Hallar la matriz de esta aplicación lineal cuando tomamos las bases canónicas.
b) Hallar su núcleo.

SOLUCION

a) Debemos hallar la imagen de (1,0,0).

$$f(1,0,0) = f(1,0,1) - f(0,0,1) = (1,1,1) - (2,3,2) = (-1,-2,-1)$$

y por tanto la matriz en las bases canónicas será:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Para hallar el núcleo debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -2x + 2y + 3z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son de la forma:

$$x = \lambda \quad , \quad y = \lambda \quad , \quad z = 0 \qquad \lambda \in R$$

por lo que el núcleo será: $\text{Ker } f = \{ x \mid x = (\lambda, \lambda, 0), \ \lambda \in R \}$.

19 ***Sea E un espacio vectorial de dimensión tres sobre R. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de E. Consideremos la aplicación lineal f: E ⟶ E cuya matriz en la base considerada es:***

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz de f en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ tal que:

$$u_1 = e_1 + e_2 \quad , \quad u_2 = e_1 - e_2 \quad , \quad u_3 = 2e_3$$

SOLUCION

Dado que $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,-1,0)$ y $u_3 = (0,0,2)$ es posible calcular sus imágenes utilizando la matriz dada, obteniéndose:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= 3e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(u_2) &= e_1 - 4e_2 - e_3 \qquad (1) \\ f(u_3) &= 12e_1 + 8e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

Ahora bien, de las igualdades que definen los vectores u_i se obtiene:

$$e_1 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 \quad , \quad e_2 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 \quad , \quad e_3 = \frac{1}{2}u_3$$

que sustituidas en (1) nos dan:

$$f(u_1) = \frac{5}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3$$

$$f(u_2) = -\frac{3}{2}u_1 + \frac{5}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3$$

$f(u_3) = 10\,u_1 + 2\,u_2 + u_3$

Por tanto la matriz buscada será:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 10 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

20 *Una aplicación lineal de un espacio vectorial de dimensión 2 sobre R, sobre sí mismo, tiene por matriz en la base* $\{e_1, e_2\}$ *:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz de dicha aplicación en la base: $\{v_1, v_2\}$ *tal que:*

$$2\,v_1 = e_1 + e_2 \qquad ; \qquad 2\,v_2 = e_2 - e_1$$

SOLUCION

$$f(v_1) = \frac{1}{2} f(e_1) + \frac{1}{2} f(e_2) = -\frac{1}{2}(e_1 + e_2) = -v_1$$

$$f(v_2) = -\frac{1}{2} f(e_1) + \frac{1}{2} f(e_2) = \frac{5}{2}(e_2 - e_1) = 5\,v_2$$

Por tanto la matriz pedida es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

21 *Sea* $f: R_3 \longrightarrow R^2$ *una aplicación lineal que en las bases* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *de* R^3 *y* u_1,u_2 *de* R^2 *tiene por matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Se toma en R^3 *la base* $\{v_1,v_2,v_3\}$ *definida como:*

$$v_1 = e_2 + e_3 \quad , \quad v_2 = e_3 + e_1 \quad , \quad v_3 = e_1 + e_2$$

¿Cuál es la nueva matriz de f? (En R^2 *se conserva la base* $\{u_1,u_2\}$ *)*

b) Se elige ahora en R^2 *la base* $\{w_1, w_2\}$ *tal que:*

$$w_1 = \frac{u_1 + u_2}{2} \qquad w_2 = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

¿Cuál es la matriz de f? (En R^3 *se conserva la base* $\{e_1,e_2,e_3\}$ *)*

c) ¿Cuál es la matriz de f en las bases $\{v_1,v_2,v_3\}$ *de* R^3 *y* $\{w_1,w_2\}$ *de* R^2 *?*

SOLUCION

a) $f(v_1) = f(e_2 + e_3) = f(e_2) + f(e_3) = -u_2$

$f(v_2) = f(e_3 + e_1) = f(e_3) + f(e_1) = 3\,u_1$

$f(v_3) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = u_1 + 5\,u_2$

con lo que la matriz de f en las bases $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{u}_j$ será:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b) De la definición de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ se deduce:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \qquad (1)$$

en consecuencia:

$$f(\mathbf{e}_1) = 2\,\mathbf{u}_1 + 3\,\mathbf{u}_2 = 5\,\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$$
$$f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{u}_1 + 2\,\mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_1 - 3\,\mathbf{w}_2$$
$$f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{u}_1 - 3\,\mathbf{u}_2 = -2\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2$$

con lo que la matriz en las bases $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{w}_j$ será:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

c) De las relaciones que hemos obtenido para escribir la matriz B y de (1) se deduce:

$$f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{u}_1 = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$
$$f(\mathbf{v}_2) = 3\,\mathbf{u}_1 = 3\,\mathbf{w}_1 + 3\,\mathbf{w}_2$$
$$f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1 + 5\,\mathbf{u}_2 = 6\,\mathbf{w}_1 - 4\,\mathbf{w}_2$$

con lo que la matriz de f en las bases $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{w}_j$ será:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

22 *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Se pide: Hallar las matrices $A + B$, $A - B$, $3 \cdot A$, $5 \cdot B$, $2 \cdot A + 7 \cdot B$

SOLUCION

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -1 & 5 & 10 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad A - B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -8 \\ -4 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$3.\,A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad 5\,.\,B = \begin{pmatrix} 0 & 25 & 10 \\ 25 & 10 & 45 \\ 20 & 25 & 0 \\ 0 & 15 & 40 \end{pmatrix}$$

$$2\,.\,A + 7\,.\,B = \begin{pmatrix} 2 & 39 & -8 \\ -7 & 20 & 65 \\ 28 & 35 & 8 \\ 2 & 23 & 52 \end{pmatrix}$$

23 *Se considera el conjunto* $\mathcal{S}$ *de las matrices de la forma:*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

donde a y b pertenecen al conjunto R de los números reales. Demostrar que constituye un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos.

SOLUCION

Sean $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$ dos elementos de $\mathcal{S}$. Se verifica:

$$\begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \qquad \begin{pmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

y por tanto $\mathcal{S}$ es un subespacio vectorial.

24 *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar las matrices: $A+B$, $A+C$, $A.B$, $B.C$, $A.C+B.A$, $3.A$, $5.B$, $8.C$, $3.A-5.B$, A^2 , B^2 , A^3 , B^3 , A^n , B^n , C^2 , C^3 , C^n .

SOLUCION

Las nueve primeras matrices no presentan dificultad. Nos ocuparemos del cálculo de las sucesivas potencias de las matrices A, B y C.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2 \Rightarrow A^n = A^2$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\,C \ , \quad C^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = 3^2\,C \quad , \quad C^4 = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad C^{n-1} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix} = 3^{n-1} . C$$

25 *Sea la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$

Determinar todas las matrices X de orden 2 tales que A . X = 0. Valor de a para que el pro-

blema sea posible.

SOLUCION

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+az & 3y+at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar al sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} x+2z=0 \\ y+2t=0 \\ 3x+az=0 \\ 3y+at=0 \end{array}\right. \quad \text{cuyas soluciones son} \quad \left\{\begin{array}{r} x=-2z \\ y=-2t \\ (a-6)z=0 \\ (a-6)t=0 \end{array}\right.$$

Podemos distinguir dos casos:

a) $a \neq 6 \quad \Rightarrow \quad x=y=z=t=0$ y la solución es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $a = 6 \quad \Rightarrow \quad z$ y t pueden tomar cualquier valor, y la solución es:

$$\begin{pmatrix} -2z & -2t \\ z & t \end{pmatrix}$$

26 *Sean las matrices:* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcular las matrices:

$$C = (A+B+I) \cdot (A-B+I)$$

$$D = (A+B-I) \cdot (A+B+I)$$

SOLUCION

$$A+B+I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A-B+I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A+B-I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A+B+I = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

27 *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre R de dimensiones 3 y 4 respectivamente. Sean:* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *base de E* y $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ *base de F.*

Sea G un espacio vectorial sobre R de dimensión 2, una de cuyas bases es $\{v_1, v_2\}$.

Se consideran las aplicaciones lineales:

$$f : E \longrightarrow F \quad , \quad g : F \longrightarrow G$$

que en las bases consideradas en cada espacio, tienen como matriz, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar el núcleo de la aplicación lineal g, el de f, la dimensión de Im f e Im g. Hallar la matriz de $g \circ f$, $Ker\,(g \circ f)$ *e* $Im\,(g \circ f)$.

SOLUCION

a) Ker g

Debe resolverse el sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2t = 0 \\ -x + 2y + 3t = 0 \end{cases} \qquad \text{de soluciones} \qquad x = -\frac{t}{3} \quad , \quad y = -\frac{5t}{3}$$

Así pues, los elementos del núcleo son los de la forma:

$$\mathbf{x} = -\frac{t}{3}\,\mathbf{u}_1 - \frac{5t}{3}\,\mathbf{u}_2 + z\,\mathbf{u}_3 + t\,\mathbf{u}_4 \quad \text{cualesquiera que sean } z \text{ y } t.$$

b) Ker f

Debe resolverse el sistema:

$$\begin{cases} x \qquad - 2z = 0 \\ \quad y \qquad = 0 \\ x + y + \; z = 0 \\ \quad y \qquad = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x = y = z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Ker } f = \quad \mathbf{0}$$

c) Los tres vectores columna de la matriz de f son independientes y por tanto dim Imf = = 3.

d) Los dos primeros vectores columna de la matriz de g son linealmente independientes , lo que, teniendo en cuenta la dimensión de G, nos dice que dim Im g = 2.

e) Matriz de $g \circ f$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

f) Ker ($g \circ f$)

Debe resolverse el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -x + 5y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \text{de soluciones} \qquad x = 2z \quad , \quad y = 0$$

Así pues, los elementos del núcleo son los de la forma:

$$\mathbf{x} = 2z\,\mathbf{e}_1 + z\,\mathbf{e}_3 \qquad \text{siendo } z \text{ cualquiera.}$$

g) Im ($g \circ f$)

Los dos primeros vectores columna de la matriz de $g \circ f$ son linealmente independientes, lo que nos dice que dim Im ($g \circ f$) = 2 y por tanto Im ($g \circ f$) = G.

28 *Sean E, F y G tres espacios vectoriales sobre R de dimensiones respectivas 2, 3 y 4. Se consideran las aplicaciones lineales:*

$$f: E \longrightarrow F \qquad , \qquad g: F \longrightarrow G$$

que en unas ciertas bases tienen por matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la matriz de $g \circ f$

b) Hallar núcleo e imagen de f, g y $g \circ f$.

SOLUCION

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b.1) Núcleo de f.
Se reduce al vector (0,0).

b.2) Núcleo de g.
Se reduce al vector (0,0,0).

b.3) Núcleo de $g \circ f$
Se reduce al vector (0,0).

b.4) Imagen de f.
Son los vectores de F con la primera componente nula.

b.5) Imagen de g.
Son los vectores de la forma: $(x+z , y+z, z , z)$ o bien, teniendo en cuenta que x, y,z, son cualesquiera, (a,b,c,d).

b.6) Imagen de $g \circ f$.
Son los vectores de la forma (a,b,a,a).

29 *Sean:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

¿Existe una matriz A tal que $C = A \cdot B$?

SOLUCION

Debe ser una matriz de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y como debe cumplirse

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -13 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

tendrán que verificarse las siguientes igualdades:

$$\left\{ \begin{aligned} a + 2b &= 1 \\ 2a - b &= 7 \\ -3a + 4b &= -13 \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} c + 2d &= 5 \\ 2c - d &= 0 \\ -3c + 4dc &= 5 \end{aligned} \right.$$

cuyas soluciones son:

$a = 3$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 2$

por lo que la matriz A existe y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

CAPITULO III
Determinantes

1 *Calcular los siguientes determinantes de segundo orden:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2/3 & 7/4 \\ 5/2 & 8/5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \sqrt{3}+5 & 5 \\ 2 & \sqrt{3}-5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\sqrt{3} & 2+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4+\sqrt{2} & 5\sqrt{3} \\ 5-4\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \,.\, 5 - 1 \,.\, 3 = 10 - 3 = 7$$

$$\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = (-5) \,.\, 2 - (-4) \,.\, (-3) = -10 - 12 = -22$$

$$\begin{vmatrix} 2/3 & 7/4 \\ 5/2 & 8/5 \end{vmatrix} = -\frac{52}{120} \qquad \begin{vmatrix} \sqrt{3}+5 & 5 \\ 2 & \sqrt{3}-5 \end{vmatrix} = -32$$

$$\begin{vmatrix} 4-\sqrt{3} & 2+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{2} & 3-\sqrt{2} \end{vmatrix} = 6-6\sqrt{2}-3\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{10}$$

$$\begin{vmatrix} 4+\sqrt{2} & 5\sqrt{3} \\ 5-4\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{vmatrix} = 24\sqrt{2}+12-25\sqrt{3}-20\sqrt{6}$$

2 *Poner de manifiesto si los siguientes determinantes son nulos sin necesidad de desarrolarlos.*

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3/5 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; \quad c) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & \sqrt{6} \end{vmatrix}; \quad d) \begin{vmatrix} -\sqrt{3} & 3 \\ 5 & -5\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

SOLUCION

a) Por ser la primera fila igual a la segunda multiplicada por 5.

b) Por ser la segunda columna igual a la primera multiplicada por 2.

c) Es distinto de cero, ninguna línea es múltiplo de la otra.

d) Por ser la segunda columna igual a la primera multiplicada por $\sqrt{3}$

3 *En virtud de las propiedades de los determinantes, y sin desarrollar, establecer la igualdad siguiente:*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1+0 \\ 1+0 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 \\ 1+0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1+a & 0 \\ 1+0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$$

4 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

a) $\begin{vmatrix} x^4-6 & x \\ x^3-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *b)* $\begin{vmatrix} x-1 & 2x-3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} x^2-5 & x-2 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} = 12$ *d)* $\begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x-2 & x-4 \end{vmatrix} = -14$

SOLUCION

a) Del desarrollo del determinante se obtiene:

$(x^4-6).1 - (x^3-3).\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6 + 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

b) Del desarrollo del determinante se obtiene la ecuación:

$(x-1).4 - 2.(2x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4+6 = 0$

lo que nos indica que la ecuación carece de soluciones.

c) Desarrollando el determinante se obtiene la ecuación:

$(x+1).(x^2-x+7) - 12 = 0$

cuyas raices, con los actuales conocimientos del alumno de C.O.U. no pueden ser calculadas.

d) El desarrollo del determinante da como resultado:

$$-4x + 2 = -14 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

5 *Dados los siguientes conjuntos de vectores, decidir si son o no linealmente independientes.*

a) *(2,3),(5,1)* *b)* *(6,4),(9,6)* *c)* *(4,1),(1,1/4)* *d)* *(1,2),(–1,1)*

SOLUCION

Dos vectores son linealmente independientes si y solo si su determinante es distinto de 0. De acuerdo con ello se tiene:

a) Linealmente independientes puesto que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

b) Linealmente dependientes.

c) Linealmente dependientes.

d) Linealmente independientes.

6 *Calcular, mediante su desarrollo por la regla de Sarrus, los siguientes determinantes:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & -4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \Delta_5 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \qquad \Delta_6 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

SOLUCION

$$\Delta_1 = (2.2.4 + 4.0.3 + 1.5.1) - (3.2.1 + 1.4.4 + 0.5.2) =$$

$$= (16 + 0 + 5) - (6 + 16 + 0) = 21 - 22 = -1.$$

$$\Delta_2 = (9.4.(-4) + 3.5.1 + 2.3.6) - (1.4.6 + 2.3.(-4) + 5.3.9) =$$

$$= (-144 + 15 + 36) - (24 - 24 + 135) = -93 - 135 = -228$$

$$\Delta_3 = 35$$

$$\Delta_4 = 22$$

$$\Delta_5 = 6$$

$$\Delta_6 = 132$$

7 *En virtud de las propiedades de los determinantes, y sin desarrollar, establecer si son nulos o no los siguientes determinantes:*

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

SOLUCION

a) $\Delta = 0$ pues la tercera columna es igual a la suma de las otras dos.

b) $\Delta = 0$ pues la tercera columna es igual a la suma de la segunda con el doble de la primera.

c) $\Delta = 0$ pues la tercera columna es igual a la suma de la segunda con el doble de la primera.

d) $\Delta = 0$ pues la cuarta columna es igual a la suma de la primera, la segunda y el doble de la tercera.

e) En este caso es preciso someter el determinante a diversas transformaciones.

Las mismas se indican abreviadamente en cada caso:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ -3 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 19 & -1 \\ 2 & -1 & -16 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

col. 2 – col 1 x 2 col.3 – col 1 x 5 col. 4 – col 1. x 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 11 & 8 \\ 2 & -1 & -16 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -16 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -61 & 6 \end{vmatrix} =$$

fil4 – (fil. 2 + fil. 3) col 3. – col 2 x 16 fil. 2 + fil. 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -61 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -61 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -61 & 14 \end{vmatrix} =$$

fil. 3 – fil. 1 x 2 fil. 4 + fil. 3 x 4 fil.3 – fil.2 x 1/2

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -61 & 14 \end{vmatrix} = (-61).\,2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$$

(–61) y 2 factor común

siendo distinto de cero el último determinante al no existir ninguna columna que pueda expresarse como combinación lineal de las restantes.

8 *Demostrar, por generalización del problema 3, que:*

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd + bcd + acd + abd + abc$$

SOLUCION

Analogamente al problema 3 se sustituirán los "1" que aparecen en el determinante por la expresión 1+0, lo que permitirá descomponer sucesivamente el determinante en suma de otros, en total 16. De ellos serán de valor 0 aquellos en que aparezcan dos columnas iguales,(formadas solamente por unos).

De los 16 posibles determinantes resultan ser no nulos los siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = bcd + acd + abd + abc + abcd$$

9 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & x+2 & 6 \\ 3 & 4 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ *b)* $\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x-1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$

SOLUCION

a) Desarrollando el determinante por la regla de Sarrus y simplificando se obtiene la ecuación:

$$2x^2 + 4x - 24 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = -1 + \sqrt{13} \qquad x_2 = -1 - \sqrt{13}$$

b) Del desarrollo por la regla de Sarrus se obtiene la ecuación:

$$-6x^2 + 3x = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

10 *Calcular los siguientes determinantes transformándolos previamente en otros más sencillos.*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 51 & 79 & 28 \\ 40 & 54 & 14 \\ 93 & 124 & 31 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} -b & 1 & c \\ 1 & b & -a \\ a & -c & 1 \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} b & a+c & b \\ b+c & a & a \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

SOLUCION

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \underset{\text{fil 3 + fil. 1}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 + 4) = 16$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underset{\text{fil 3 + fil 1}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}} = \underset{\text{fil. 2 – fil. 1 x 5}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 7 & -35 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}} = \underset{\text{desarrollo por fil 1.}}{1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -35 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}} =$$

$$= \underset{\text{col.2 + col. 1 x 5}}{1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 19 \end{vmatrix}} = 1 \cdot (7 \cdot 19 - 0) = 133.$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \underset{\text{cols. 2 y 3 – col. 1}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & (a-b).c & (a-c).b \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} a-b & a-c \\ (a-b).c & (a-c).b \end{vmatrix} = 1.\,(a-b).(a-c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & b \end{vmatrix} = (a-b).(a-c).(b-c)$$

d) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) = 2$$

col. 3 – (col 1 + col. 2)

e) $$\begin{vmatrix} 51 & 79 & 28 \\ 40 & 54 & 14 \\ 93 & 124 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 51 & 28 & 28 \\ 40 & 14 & 14 \\ 93 & 31 & 31 \end{vmatrix} = 0 \text{ (tiene dos columnas iguales).}$$

f) $$\begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 0 & a-b & b-a \\ 0 & c-a & a-c \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} a-b & b-a \\ c-a & a-c \end{vmatrix} = 1.(a-b).(c-a) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0.$$

g) $$\begin{vmatrix} -b & c & c \\ 1 & b & -a \\ a & -c & 1 \end{vmatrix} = (-b^2-c^2-a^2) - (abc+abc+1) = -(a^2+b^2+c^2+2abc-1).$$

h) $$\begin{vmatrix} b & a+c & b \\ b+c & a & a \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = -4abc$$

11 *Dados los siguientes conjuntos de vectores, decidir si son, o no, linealmente independientes.*

a) $\{(1,2,5),(2,3,1),(0,2,4)\}$ *b)* $\{(2,1,6),(5,1,0),(3,0,-6)\}$

c) $\{(3,1,2),(4,0,2),(5,1,1)\}$ *d)* $\{(1,-2,7),(1,1,1),(5,1,6)\}$

SOLUCION

a) Son linealmente independientes pues $\det[(1,2,5),(2,3,1),(0,2,4)] = 14 \neq 0$

b) Son linealmente dependientes.,pues det $[(2,1,6),(5,1,0),(3,0,6)] = 0$

c) Son linealmente independientes.

d) Son linealmente independientes.

12 *Dados los siguientes determinantes calcular los adjuntos y los menores complementarios de los elementos indicados:*

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Adjunto de 5.
Menor complementario del 0 de la tercera columna.
Adjunto del 1 de la cuarta columna.
Menor complementario de −2.

SOLUCION

Adjunto de 5: $$-\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Menor complementario del 0 de la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 41$$

Adjunto del 1 de la cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Menor complementario de -2:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Adjunto del 3 de la segunda columna.
Adjunto del -2 de la tercera fila.
Menor complementario de -1.

SOLUCION

Adjunto del 3 de la segunda columna:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

Adjunto del -2 de la tercera fila

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Menor complementario de -1.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

13 *Calcular los siguientes determinantes de orden superior al 3 transformándolos previamente:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} =$$

Cada columna $-$ la anterior.

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (4 - 3) = 1.$$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix}$

SOLUCION

Su valor es : $a \cdot e \cdot h \cdot j$

Basta desarrollar sucesivamente por los términos de la primera columna.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

SOLUCION

Su valor es : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

d) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & m & n \\ -a & -b & c & p \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2b & m+c & n+d \\ 0 & 0 & 2c & p+d \\ 0 & 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 2b & m+c & n+d \\ 0 & 2c & p+d \\ 0 & 0 & 2d \end{vmatrix} =$$

todas las filas + fila 1.

$$= a \cdot 2b \cdot \begin{vmatrix} 2c & p+d \\ 0 & 2d \end{vmatrix} = a \cdot 2b \cdot 2c \cdot 2d = 8 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$$

e) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix} =$$

todas columnas + columna 1

$$= (a+b+c) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & -c \end{vmatrix} = (a+b+c) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -a & -a+c-b & 0 \\ c-a & -a+c-b & a-b-c \\ b-a & 0 & a-b-c \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \cdot 1 \cdot (-a+c-b) \cdot (a-b-c) \cdot \begin{vmatrix} -a & 1 & 0 \\ c-a & 1 & 1 \\ b-a & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \cdot 1 \cdot (-a+c-b) \cdot (a-b-c) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 \\ b-a & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \cdot 1 \cdot (-a+c-b) \cdot (a-b-c) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ b-a & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c) \cdot 1 \cdot (-a+c-b) \cdot (a-b-c) \cdot (-1) \cdot (c-b+a) =$$

$$= (a+b+c) \cdot (a-b-c) \cdot (b-c-a) \cdot (c-a-b).$$

f) $\begin{vmatrix} 11 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 19 & 8 & 7 & 16 \end{vmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 11 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 4 & 7 \\ 8 & 3 & 5 & 8 \\ 19 & 8 & 7 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 5 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 0 \\ 19 & 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

Col. 4 – (col.2 + col. 3)

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (15 - 12) = 1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$$

g) $\begin{vmatrix} 12 & 6 & 2 & 8 \\ 11 & 7 & 4 & 11 \\ 15 & 6 & 5 & 11 \\ 14 & 7 & 7 & 15 \end{vmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 12 & 6 & 2 & 8 \\ 11 & 7 & 4 & 11 \\ 15 & 6 & 5 & 11 \\ 14 & 7 & 7 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 6 & 2 & 0 \\ 11 & 7 & 4 & 0 \\ 15 & 6 & 5 & 0 \\ 14 & 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 11 & 7 & 4 \\ 15 & 6 & 5 \end{vmatrix} =$$

col. 4 – (col.2 + col. 3)

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 7 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (70 - 42) = 84 .$$

14 ***Calcular el rango de las siguientes matrices:***

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

SOLUCION

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

por lo menos el rango de la matriz es 2.

Orlando dicho menor con la tercera columna y la tercera fila obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

lo que indica que el rango de la matriz es, por lo menos, 3.

Orlando este determinante con la cuarta columna y la cuarta fila se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dado que el valor del anterior determinante es 0 se procede a orlar el determinante de tercer orden con la cuarta columna y la quinta fila de la matriz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Por lo que, al no poderse formar determinantes de orden superior a 4 con los elementos de la matriz, se tiene que su característica es 4.

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCION

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

por lo menos el rango de la matriz es 2.

Orlando dicho menor con:

col. 3 y fila 3	col.3 y fila 4	col.4 y fila 3	col4 y fila 4	col.5 y fila 3
$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

los los determinantes obtenidos son todos de valor cero.

Finalmente, orlando con la quinta columna y la cuarta fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -56$$

lo que indica que el rango de la matriz es,por lo menos, 3.

Orlando este determinante por:

col. 3 y fila 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

col. 4 y fila 3

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

De donde la característica de la matriz dada es 3.

c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & -3 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 7 & 3 & -3 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -10 & -5 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 7 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

Como
$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

por lo menos el rango de la matriz es 3.

Orlando este determinante con la cuarta columna y la primera fila se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 7 & 3 \\ -2 & 0 & -10 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$$

lo que indica que el rango de la matriz es,por lo menos, 4.

Todos los determinantes de orden superior a 4 que se pueden formar son nulos.

La característica de la matriz es por tanto 4.

15 *Dados los siguientes vectores de R^4, calcular el número máximo de vectores linealmente independientes que se pueden extraer de ellos:*
$\{(2,3,-1,4), (1,3,5,2), (2,1,3,4), (1,0,-6,2), (3,4,8,6)\}$

SOLUCION

El problema equivale a calcular la característica de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & -6 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

y que resulta ser 3.

Dado que el determinante de tercer orden distinto de cero es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

los vectores (2,3,–1,4) , (1,3,5,2) y (2,1,3,4) son linealmente independientes.

Los vectores (1,0,–6,2) y (3,4,8,6) son combinación lineal de ellos.

16 *Decidir cuales de las siguientes matrices son inversibles:*

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto la matriz no es inversible.

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

La matriz dada es inversible, puesto que su determinante , 66 , es distinto de cero.

c) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

La matriz dada es inversible, puesto que su determinante, –15, es distinto de cero.

17 *Calcular las inversas de las siguientes matrices:*

a) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

Es inversible, pues det A = 14

Matriz de adjuntos : $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ Traspuesta de la misma: $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

La matriz inversa será esta última dividida por det A, esto es :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \\ \\ \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

B es inversible, pues det B $= -1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $$C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

C es inversible, pues det C $= -30$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{30} & \frac{-4}{30} \\ \\ \frac{-3}{30} & \frac{-2}{30} \end{pmatrix}$$

d) $$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

D es inversible, pues det D $= -23$

Matriz de adjuntos:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 5 \\ -14 & 8 & 1 \\ -3 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de la misma:

$$\begin{pmatrix} -1 & -14 & -3 \\ -6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Y la matriz inversa se obtendrá dividiendo por -23 los términos de esta última.

e) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

No es inversible, pues su determinante es cero.

f)
$$F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

F es inversible, puesto que : det F $= -80$

Matriz de adjuntos:

$$\begin{pmatrix} -37 & 1 & 27 & -48 \\ -13 & 9 & 3 & -32 \\ -26 & 18 & 6 & 16 \\ 32 & -16 & -32 & 48 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de la misma:

$$\begin{pmatrix} -37 & -13 & -26 & 32 \\ 1 & 9 & 18 & -16 \\ 27 & 3 & -6 & 32 \\ -48 & -32 & 16 & 48 \end{pmatrix}$$

Y la matriz inversa se obtendrá dividiendo poe -80 los términos de esta última.

18 *Dadas las matrices I, A :*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular:

a) La inversa de $I - A$.

b) $(I - A)^n$ siendo $n \in N$, $n > 3$

c) La inversa de $I + A$

d) $(I + A)(I - A)^{-1}$

SOLUCION

a)
$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(I - A) = 1$

Matriz de adjuntos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de la misma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la matriz inversa de $I - A$ coincide con esta última.

b) Teniendo en cuenta las operaciones con matrices y que la matriz I permuta con cualquier otra respecto a suma y producto, podemos escribir (teniendo en cuenta el binomio de Newton) y que $I^n = I$:

$$(I-A)^4 = \binom{4}{0} I^4 - \binom{4}{1} I^3.A + \binom{4}{2} I^2.A^2 - \binom{4}{3} I.A^3 + \binom{4}{4} A^4 =$$

$$= I^4 - 4A + 6\,A^2 - 4\,A^3 + A^4$$

$$(I-A)^5 = I^5 - 5\,A + 10\,A^2 - 10\,A^3 + 5\,A^4 - A^5$$

....

Para calcular estas potencias necesitamos calcular las de la matriz A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, para $n \geqslant 4$ es $A^n = 0$.

Teniendo esto en cuenta resulta:

$$(I-A)^4 = I - 4 \,.\, A + 6 \,.\, A^2 - 4 \,.\, A^3$$

$$(I-A)^5 = I - 5 \,.\, A + 10 \,.\, A^2 - 10 \,.\, A^3$$

....

$$(I-A)^n = I - \binom{n}{1} A + \binom{n}{2} A^2 - \binom{n}{3} A^3 =$$

$$= I - n \,.\, A + \frac{n(n-1)}{2} A^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} A^3$$ esto es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -n & \dfrac{n(n-1)}{2} & -\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & -n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Para hallar la inversa de $I + A$, calculemos previamente dicha matriz:

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det(I + A) = 1$$

Matriz de los adjuntos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de la misma (e inversa)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Calculemos, finalmente, $(I + A) . (I - A)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CAPITULO IV

Sistemas de ecuaciones lineales

1 ***Indicar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles, determinados o indeterminados.***

a) $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 1 \\ x + 3y + 3z = -1 \end{cases}$

SOLUCION

$$M = \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) = AM$$

rang A = rang AM = 2 $\Rightarrow$ compatible
$2 < 3$ = número de incógnitas $\Rightarrow$ indeterminado

b) $\begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ x + y - z + 3 = 2 \\ x - 5y + 5z = -4 \end{cases}$

SOLUCION

rang A = 2 ; rang AM = 3 $\Rightarrow$ incompatible

c) $\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 1 \\ x + 3y + 3z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + 2z = 2 \\ 2x + 5y - z = -7 \end{cases}$

SOLUCION

rang A = rang AM = 3 $\Rightarrow$ compatible
3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ determinado

d) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z - t = 5 \\ 2x - 5y + 4z + 5t = -2 \\ 7x - 6y + 10z + 9t = 1 \\ 4x - 13y + 7t = -12 \end{cases}$

SOLUCION

rang A = rang AM = 3 $\Rightarrow$ compatible
$3 <$ número de incógnitas $\Rightarrow$ indeterminado

e) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 5z = 4 \end{cases}$

SOLUCION

rang A = 2 ; rang AM = 3 $\Rightarrow$ incompatible

f) $\begin{cases} 4x + 4y - z = -1 \\ 2x + 3y - 2z = -4 \\ -3x + 2y - 3z = 6 \\ x + 4y - 4z = 5 \end{cases}$

SOLUCION

rang A = 3 ; rang AM = 4 $\Rightarrow$ incompatible

2 *Discutir, según los valores que adopte el parámetro t, la compatibilidad o incompatibilidad de los siguientes sistemas.*

a) $\begin{cases} 5x - 11y + 9z = t \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$

SOLUCION

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -11 & 9 & t \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4+t \end{array}\right) = AM$$

$\text{rang } A = 2$

$-4 + t = 0 \Rightarrow \text{rang } AM = 2 \Rightarrow t = 4$ compatible

$-4 + t \neq 0 \Rightarrow \text{rang } AM = 3 \Rightarrow t \neq 4$ incompatible

b) $\begin{cases} x + ty + z = t + 2 \\ x + y + tz = -2(t+1) \\ tx + y + z = t \end{cases}$

SOLUCION

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & t+2 \\ 1 & 1 & t & -2(t+1) \\ t & 1 & 1 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & t & 1 & t+2 \\ 0 & 1-t & t-1 & -3t-4 \\ 0 & 0 & -t^2-t+2 & 2t^2+6t+4 \end{array}\right)$$

$1 - t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \text{rang } A = 1 \\ \text{rang } AM = 2 \end{array} \Rightarrow$ incompatible

$-t^2 - t + 2 = 0 \Rightarrow t = 1$ (ya visto) y $t = -2$

$t = -2$ $\quad AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ rang A = rang AM = 2
compatible indeterminado

$t \neq 1$ y $t \neq -2$

rang A = rang AM = 3 $\Rightarrow$ compatible determinado

c) $\begin{cases} (t-1)x - ty = 2 \\ 6tx - (t-2)y = 1 - t \end{cases}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} t-1 & -t \\ 6t & -(t-2) \end{vmatrix} = 5t^2 + 3t - 2 \quad ; \quad 5t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{5} \quad ; \quad t = -1$$

$$\begin{vmatrix} t-1 & 2 \\ 6t & 1-t \end{vmatrix} = -t^2 - 10t - 1$$

$t = \frac{2}{5}$ $\Rightarrow$ rang A = 1 ; rang AM = 2 incompatible

$t = -1$ $\Rightarrow$ rang A = 1 ; rang AM = 2 incompatible

$t \neq \frac{2}{5}$; $t \neq -1$ $\Rightarrow$ rang A = rang AM = 2 compatible determinado

d) $\begin{cases} (1-t)x + (t+3)y = 3t + 1 \\ 2(1-t)x + (t+6)y = t + 2 \end{cases}$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 1-t & t+3 \\ 2(1-t) & t+6 \end{vmatrix} = (1-t)(-5t) \qquad \text{ceros para } t=0 \text{ y } t=1$$

$$AM = \left(\begin{array}{cc:c} 1-t & t+3 & 3t+1 \\ 2(1-t) & t+6 & t+2 \end{array}\right)$$

$t = 0$	rang A = rang AM = 1	compatible indeterminado
$t = 1$	rang A $\neq$ rang AM	incompatible
$t \neq 0$ y $t \neq 1$	rang A = rang AM = 2	compatible determinado

e) $\begin{cases} tx + 3y = 2 \\ 3x + 2y = t \\ 2x + ty = 3 \end{cases}$

SOLUCION

$$A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & t \end{pmatrix} \qquad AM = \left(\begin{array}{cc:c} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{array}\right)$$

rang A $\leqslant$ 2 $\Rightarrow$ rang AM $\leqslant$ 2 para que pueda ser compatible

$$\begin{pmatrix} t & 3 & 2 \\ 3 & 2 & t \\ 2 & t & 3 \end{pmatrix} = 18t - t^3 - 35 \ ; \ 18t - t^3 - 35 = 0 \Rightarrow t = -5 \ ; \ t = \frac{5 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

En R debe ser $t = -5$ para que el sistema pueda ser compatible. Así:

$t \neq -5 \quad \Rightarrow$ incompatible

$t = -5$

$$AM = \left(\begin{array}{cc:c} -5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{como} \qquad \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

rang A = rang AM = 2
compatible determinado

f) $\begin{cases} \quad\ \ 2y - z = t \\ 3x \quad\ \ -2z = 11 \\ \quad\ \ \ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = t \end{cases}$

SOLUCION

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad AM = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & -1 & t \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & t \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & t \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & t \end{vmatrix} = -2t + 12 \quad ; -2t + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 6$$

$t \neq 6 \Rightarrow$ rang A = 3 ; rang AM = 4 $\Rightarrow$ incompatible
$t = 6 \Rightarrow$ rang A = 3 ; rang AM = 3 $\Rightarrow$ compatible determinado

3 *Resolver los siguientes sistemas de Cramer.*

a) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$

SOLUCION

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

b) $\begin{cases} x - 4y = 3 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

SOLUCION

$$x = \frac{22}{14} \qquad y = -\frac{5}{14}$$

c) $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - 8y = 16 \end{cases}$

SOLUCION

$$x = \frac{96}{11} \qquad y = -\frac{10}{11}$$

d) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 2y - 3z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$

SOLUCION

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \quad A_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \quad ; \quad A_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

de donde: $x = 3$; $y = z = 1$

e) $\begin{cases} 3x - 4y - z = 1 \\ 2x + y - 6z = 1 \\ x + y - 3z = 2 \end{cases}$

SOLUCION

$A = 8$; $A_x = 40$; $A_y = 24$; $A_z = 16$
de donde:

$$x = 5 \quad ; \quad y = 3 \quad ; \quad z = 2$$

f) $\begin{cases} 2x + 3y + z - t = 1 \\ x - 3y - 2z + t = 6 \\ 3x + 2y - 3z + 2t = 9 \\ x - y - z + 2t = 10 \end{cases}$

SOLUCION

$A = 44$; $A_x = 132$; $A_y = -44$; $A_z = 88$; $A_t = 176$
de donde:

$$x = 3 \quad ; \quad y = -1 \quad ; \quad z = 2 \quad ; \quad t = 4$$

g)
$$\begin{cases} x + y - z + t = -1 \\ x - y - z - t = \ \ 1 \\ -x - y + z + t = -5 \\ x + y - z - t = -1 \end{cases}$$

SOLUCION

Dado que $A = 0$ el sistema no es de Cramer.

4 *Resolver los siguientes sistemas homogéneos.*

a)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad$ y $\quad 2 \neq 0$

se puede suprimir la segunda ecuación y tomar en la primera x como incógnita principal

$$2x = -3y \qquad ; \qquad x = -\frac{3}{2}y$$

por lo que la solución será:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{2}t \\ y = t \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + 4y - 3z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad$ y $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

podemos tomar el sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y = z \\ 3x + 4y = 3z \end{cases} \quad \text{cuyas soluciones son:} \quad x = z \quad ; \quad y = 0$$

Así pues, las soluciones del sistema pueden escribirse:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 3x + y + z - t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0 \\ x + 2y + 4z + 2t = 0 \\ 2x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

Por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$17z = -4t \qquad y = -3t - 9z \qquad x = -2t - 4z - 2y$$

$$z = -\frac{4}{17}t \qquad y = -\frac{15}{17}t \qquad x = \frac{12}{17}t$$

con lo que las soluciones pueden escribirse:

$$x = \frac{12}{17}t \;;\; y = -\frac{15}{17}t \;;\; z = -\frac{4}{17}t \;;\; t = t$$

o también:

$$x = 12\,k \;;\; y = -15\,k \;;\; z = -4\,k \;;\; t = 17\,k$$

d)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -2x - 2y - z = 0 \\ x - 4y - 12z = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -12 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -15 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2y = -5z \qquad x = -3z - 2y$$

$$y = -\frac{5}{2}z \qquad x = -3z + 5z = 2z$$

con lo que las soluciones pueden escribirse:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -\frac{5}{2}t \\ z = t \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = 4k \\ y = -5k \\ z = 2k \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + 2z + 2t = 0 \\ x - 3y - z + t = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

única solución:

$$x = y = z = t = 0$$

5 *Discutir los siguientes sistemas homogéneos según sean los valores del parámetro t.*

a)
$$\begin{cases} 2x - ty + 4z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ tx - y + 13z = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 2 & -t & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ t & -1 & 13 \end{vmatrix} = -7t^2 + 9t + 36$$

$$-7t^2 + 9t + 36 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rang } A = 3, \text{ determinado}$$

una sola solución: $x = y = z = 0$

$$-7t^2 + 9t + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rang } A < 3, \text{ indeterminado, infinitas soluciones.}$$

$$-7t^2 + 9t + 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 3 \quad \text{o} \quad t = -\frac{12}{7}$$

en resumen:

$$t \neq 3 \quad \text{y} \quad t \neq -\frac{12}{7} \quad \Rightarrow \quad \text{solución única } x = y = z = 0$$

$$t = 3 \quad \text{o} \quad t = -\frac{12}{7} \quad \Rightarrow \quad \text{infinitas soluciones}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 2x + \ \ y + \ tz = 0 \\ \ \ x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & t \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 11t - 40$$

$$t = \frac{40}{11} \quad \Rightarrow \quad 11t - 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rang } A < 3 \quad \Rightarrow \quad \text{indeterminado, infinitas soluciones}$$

$$t \neq \frac{40}{11} \quad \Rightarrow \quad 11t - 40 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rang } A = 3 \quad \Rightarrow \quad \text{determinado, solución única}$$

$$x = y = z = 0$$

Sean $f, g \in End(E)$, $\dim E = 3$, tales que:

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular: $Ker f$, $Ker\, g$, $Ker(g \circ f)$, $Ker(f \circ g)$.

SOLUCION

$$\text{Ker } f = \{ x \in E \mid f(x) = \mathbf{0} \}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x + \ y + \ z = 0 \\ \ \ x \qquad + 2z = 0 \\ -3x + 2y + \ z = 0 \end{cases}$$

La solución de este sistema homogéneo es: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ por lo que

$$\text{Ker } f = \{ \mathbf{0} \} = \{ (0,0,0) \}$$

Análogamente para g se obtiene:

$$\text{Ker } g = \{ \mathbf{0} \} = \{ (0,0,0) \}$$

Se podrían hallar las respectivas matrices de $f \circ g$ y $g \circ f$ para determinar los correspondientes núcleos, pero también puede observarse directamente que al ser cada uno de los núcleos de f y g, **0** será:

$$\text{Ker } g \circ f = \{ \mathbf{0} \} \qquad \text{Ker } f \circ g = \{ \mathbf{0} \}$$

Dada la base de E_3 : $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (5,-1,3)$, $e_3 = (3,-1,4)$ hallar las componentes en esta base del vector:

$$v = (3,-7,4)$$

entendiendo que los vectores e_i, v están referidos a una misma base de E.

SOLUCION

$$x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3 = v$$

$$(x, 2x, 3x) + (5y, -y, 3y) + (3z, -z, 4z) = (3, 7, -4)$$

$$\begin{cases} x + 5y + 3z = 3 \\ 2x - y - z = 7 \\ 3x + 3y + 4z = -4 \end{cases}$$

$$x = \frac{72}{29} \qquad y = \frac{96}{29} \qquad z = -\frac{155}{29} \quad .$$

8 *En E_4 se considera el subespacio M generado por los vectores: (1,1,1,1),(1,3,1,3), (1,–1,1,–1) y el subespacio N generado por: (1,2,0,2),(1,2,1,2),(3,1,3,1). Hallar la dimensión de M ∪ N y M ∩ N y una base de dichos subespacios.*

SOLUCION

Dimensión espacio engendrado por M ∪ N =

$$= \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \quad \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Base pueden serlo tres vectores de los dados que sean linealmente independientes, por ejemplo, los correspondientes a las columnas primera, segunda y cuarta.

(1,1,1,1) (1,3,1,3) (1,2,0,2)

Espacio M ∩ N

$$(x,y,z,t) \in M \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + \lambda \\ y = \alpha + 3\beta - \lambda \\ z = \alpha + \beta + \lambda \\ t = \alpha + 3\beta - \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{eliminando parámetros} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \end{cases}$$

$$(x,y,z,t) \in N \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta + 3\lambda \\ y = 2\alpha + 2\beta + \lambda \\ z = \beta + 3\lambda \\ t = 2\alpha + 2\beta + \lambda \end{cases} \Rightarrow \text{eliminando parámetros} \Rightarrow y - t = 0$$

$$(x,y,z,t) \in M \cap N \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Dimensión espacio solución} = 2$$

Además soluciones: $x = \gamma$; $y = \partial$; $z = \gamma$; $t = \partial$ o bien

$$(x,y,z,t) = \gamma\,(1,0,1,0) + \partial\,(0,1,0,1)$$

Así, base de M ∩ N = (1,0,1,0), (0,1,0,1)

9 *Ver que el vector de R^3, (6,3,7) es combinación lineal de los vectores (2,–1,3),(3,2,–5) (1,–1,1).*

¿Forman estos últimos una base de R^3 ?

SOLUCION

$$x\,(2,1,-3) + y\,(3,2,-5) + z\,(1,-1,1) = (6,3,7)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ x + 2y - z = 3 \\ -3x - 5y + z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -77 \\ 0 & 1 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$x = -77 \qquad y = 48 \qquad z = 16$$

$$(6,3,7) = -77\,(2,1,-3) + 48\,(3,2,-5) + 16\,(1,-1,1)$$

Los tres vectores $(2, 1, -3)$, $(3, 2, -5)$, $(1, -1, 1)$ son linealmente independientes porque su matriz es de rango 3.

10 *Hallar el núcleo y la imagen de una aplicación lineal $f{:}E \longrightarrow E$, $\dim E = 4$, cuya matriz en una cierta base es:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

Núcleo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} x = \mu - \lambda \\ y = 2\mu - \lambda \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \Rightarrow \quad (x,y,z,t) = \lambda\,(-1,-1,1,0) + \mu\,(1,2,0,1)$$

Imagen

$$\dim \mathrm{Im} = 4 - \dim \mathrm{Nuc} = 2$$

Como base de la imagen pueden tomarse dos cualesquiera de los generadores (vectores columna de la matriz) que sean linealmente independientes, p.e. 1° 2°y . Así los vectores de la imagen pueden escribirse:

$$(x,y,z,t) = \lambda\,(2,-1,1,0) + \mu\,(-1,1,0,-1)$$

11 *Resolver los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss o el de Gauss-Jordan:*

a)
$$\begin{cases} 3x + y - z = 10 \\ x + y + 2z = 7 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

SOLUCION

$$x = 3 \quad ; \quad y = 2 \quad ; \quad z = 1$$

b)
$$\begin{cases} 5x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ 7x - 8y - 7z = -1 \end{cases}$$

SOLUCION

$$x = -\frac{5}{11} \qquad y = -\frac{3}{11} \qquad z = 0$$

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z - t = -3 \end{cases}$

SOLUCION

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda \\ y = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\lambda - \mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

d) $\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$

SOLUCION

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

e) $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 4 \\ 5x - 2y + z = -1 \\ 3x + y + 5z = -5 \\ 5x + y + 4z = 2 \\ 3x + 4y + 8z = -2 \\ 4x - 3y - z = 11 \end{cases}$

SOLUCION

Dado que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el sistema es incompatible.

12 *Aplicando operaciones elementales con matrices, hallar el rango de las siguientes matrices:*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCION

rango 3 puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

rango 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 32 & 55 \end{pmatrix}$$

13 *Hallar las inversas de las siguientes matrices:*

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCION

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

SOLUCION

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

No tiene matriz inversa.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

SOLUCION

La matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} \frac{9}{38} & \frac{14}{38} & \frac{13}{38} & -\frac{2}{38} \\ \frac{17}{38} & \frac{20}{38} & -\frac{5}{38} & -\frac{8}{38} \\ -\frac{1}{38} & \frac{10}{38} & \frac{7}{38} & -\frac{4}{38} \\ -\frac{6}{38} & -\frac{16}{38} & \frac{4}{38} & \frac{14}{38} \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCION

La matriz inversa es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SOLUCION

No tiene matriz inversa.

14 *Eliminar los parámetros en los siguientes sistemas:*

a) $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 2 + \ \ t \\ z = 1 - \ \ t \end{cases}$

SOLUCION

$$\text{rang}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} -4 & x-3 \\ 1 & y-2 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & x-3 \\ 1 & y-2 \\ -1 & z-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & y-2 \\ 0 & x+4y-11 \\ 0 & y+z-3 \end{pmatrix}$$

Una solución será: $\begin{cases} x + 4y - 11 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha - 3\beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases}$

SOLUCION

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 2 & -3 & x-1 \\ 1 & 1 & y-2 \\ 1 & -2 & z \end{pmatrix} \quad \text{solución} \quad 3x - y - 5z - 1 = 0$$

c) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t + \alpha \\ z = 1 + \ \ t \end{cases}$

SOLUCION

$x = 1$

d) $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \\ t = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$

SOLUCION

$x + y + z - t = 0$

15 *Determinar sistemas de ecuaciones lineales cuyas soluciones sean:*

a) $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 + 3\alpha \\ t = 4\alpha \end{cases}$

SOLUCION

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y-1 \\ 3 & z-1 \\ 4 & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & y-1 \\ 3 & z-1 \\ 4 & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x+y-2 \\ 0 & -3x+z+2 \\ 0 & -4x+t+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ -3x+z=-2 \\ -4x+t=-4 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 2 - \alpha + 2\beta \end{cases}$$

SOLUCION

$$3x - 5y + 4z - 11 = 0$$

c) $$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 2 - \alpha + 2\beta \end{cases}$$

OOLUCION

$$x - y - z + 1 = 0$$

d) $$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + \alpha - \beta + \gamma \\ z = \alpha + \beta + \gamma \\ t = -1 \\ u = 1 + \beta + 2\gamma \end{cases}$$

SOLUCION

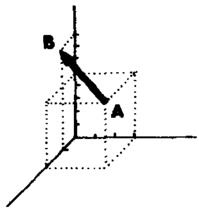
$$\begin{cases} x - y + 5t - 2u + 8 = 0 \\ -x + z - t = 0 \end{cases}$$

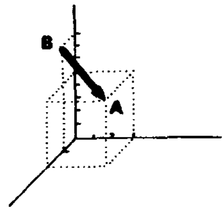
CAPITULO V
Espacio afín tridimensional

1 *Dados en R^3 los puntos $A = (2,3,5)$ y $B = (1,0,8)$ se pide:*

a) Representar gráficamente los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$

SOLUCION





b) Hallar las componentes de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$

SOLUCION

$\overrightarrow{AB}$ (1–2, 0–3, 8–5) $\qquad$ $\overrightarrow{AB}$ (–1,–3, 3)

$\overrightarrow{BA}$ (2–1, 3–0, 5–8) $\qquad$ $\overrightarrow{BA}$ (1, 3,–3)

c) Hallar los puntos C y D tales que $\overrightarrow{CD}$ sea equivalente a $\overrightarrow{AB}$

SOLUCION

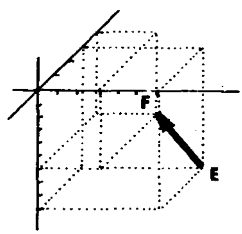
Varias soluciones.

Si, por ejemplo, C = (1,5,2) $\Rightarrow$ D = (1–1,5–3,2+3) = (0,2,5)

d) Hallar el extremo F de un vector fijo $\overrightarrow{EF}$ tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ siendo E = (–3,6,–9) y representar graficamente $\overrightarrow{EF}$.

SOLUCION

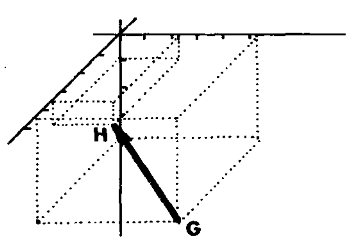
F = (–3–1,6–3,–9+3) = (–4,3,–6)



e) Hallar el origen G de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{GH}$ siendo H = (3'5,2'2,–0'9) y representar graficamente $\overrightarrow{GH}$.

SOLUCION

G = (3'5+1 , 2'2+3 , –0'9–3) = (4'5,5'2,–3'9)



2 *Sean $v = (5,-2,3)$ y $w = (-4,2,1)$ dos vectores libres. Se pide:*

a) Dibujar un representante de cada uno de ellos

b) Dibujar un representante de $v + w$.

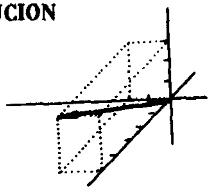
c) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $[\overrightarrow{AB}] = v - w$ y $A = (0,2,0)$?

d) Dibujar un representante de $2v$.

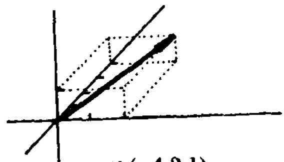
e) ¿Cuáles son las componentes del vector $3v - 5w$?

SOLUCION

a)

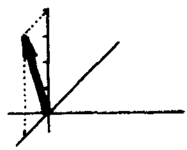


$\mathbf{v} = (5,-2,3)$



$\mathbf{w} = (-4,2,1)$

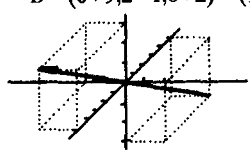
b) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1,0,4)$



c) $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (5+4,-2-2,3-1) = (9,-4,2)$

$A = (0,2,0)$ $\qquad$ $B = (0+9,2-4,0+2) = (9,-2,2)$.

d) $2\,\mathbf{v} = (10,-4,6)$



e) $3\,\mathbf{v} - 5\,\mathbf{w} = 3.(5,-2,3) - 5.(-4,2,1) = (15,-6,9) - (-20,10,5) = (35,-16,4)$.

3 *Averiguar si las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - 2y + z = 1 \\ -3x + 7y - 5z = 4 \end{cases}$$

constituyen un punto, una recta o un plano.

SOLUCION

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & -5 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & 10 & -8 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rango del sistema = 2

Dimensión variedad lineal $= 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad$ recta.

4 *Estudiar la naturaleza de las distintas soluciones posibles del sistema*

$$\begin{cases} 5x - 11y + 9z = t \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

según los valores de t.

SOLUCION

El sistema coincide con el desarrollado en el ejercicio 2, a) del capítulo anterior. Según ello

$t \neq 4 \Rightarrow$ incompatible

$t = 4 \Rightarrow$ compatible $\Rightarrow$ rango = 2 $\Rightarrow$ dim = 1 recta

5 *Estudiar la naturaleza de las distintas soluciones posibles del sistema*

$$\begin{cases} x + ty + z = t + 2 \\ x + y + tz = -2(t+1) \\ tx + y + z = 1 \end{cases}$$

según los valores de t.

SOLUCION

El sistema coincide con el desarrollado en el ejercicio 4 b) del capítulo anterior. Según ello

$t = 1 \Rightarrow$ incompatible

$t = -2 \Rightarrow$ compatible $\Rightarrow$ rango = 2 $\Rightarrow$ dim = 1 recta

$t \neq 1$ y $t \neq -2 \Rightarrow$ compatible $\Rightarrow$ rango = 3 $\Rightarrow$ dim = 0 punto

6 *Si del sistema canónico se pasa al sistema de referencia* $\{Q; a_1, a_2, a_3\}$ *en el que:*

$Q = (1,2,-1) \quad a_1 = (1,1,0) \quad a_2 = (1,0,1) \quad a_3 = (0,1,1)$

a) Determinar las coordenadas de $X = (2,3,-1)$ *en el nuevo sistema.*

b) ¿Cuál es el punto original que en el nuevo sistema tiene de coordenadas $(-1,-1,-1)$?

c) Hallar la ecacuión del plano $x + y + z - 5 = 0$ *en el nuevo sistema.*

SOLUCION

Ecuación matricial del cambio

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

por lo que la ecuación puede escribirse también:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

a) $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X' = (1,0,0)$$

b) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + y_1 + y_2 \\ 2 + y_1 + y_3 \\ -1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0$$

$$(1 + y_1 + y_2) + (2 + y_1 + y_3) + (-1 + y_2 + y_3) - 5 = 0$$

La ecuación del plano en el nuevo sistema será pues

$$2y_1 = +2y_2 + 2y_3 - 3 = 0$$

7 *Determinar un sistema de referencia en el cual la recta*

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

tenga por ecuaciones paramétricas: $x' = 0 \quad ; \quad y' = 0 \quad ; \quad z' = t$

SOLUCION

Basta tomar como origen del nuevo sistema un punto de la recta para que la recta pase por (0,0,0). Se puede tomar el (2,–1,4).

El vector director de la recta en el nuevo sistema es el (0,0,1) (tercer eje) por lo que basta tomar el vector (3,1,–2) como $\mathbf{a}_3$ de la nueva referencia. Se pueden tomar entonces como $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ dos vectores cualesquiera que formen base con $\mathbf{a}_3$. Por ejemplo (1,0,0) y (0,1,0).

Así un nuevo sistema podría ser:

$$\{ Q\ (2,-1,4) \quad ; \quad \mathbf{a}_1=(1,0,0) \quad ; \quad \mathbf{a}_2=(0,1,0) \quad ; \quad \mathbf{a}_3=(3,1,-2) \}$$

Efectivamente, se tendría

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2 + x' + 3z' \\ y = -1 + y' + z' \\ z = 4 - 2z' \end{cases}$$

de donde

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{-2}$$

se transforma en

$$\frac{2 + x' + 3z' - 2}{3} = \frac{-1 + y' + z' + 1}{1} = \frac{4 - 2z' - 4}{-2}$$

de donde

$$\begin{cases} x' + 3z' = 3y' + 3z' \\ -2y' - 2z' = -2z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases}$$

8 *Escribir las ecuaciones paramétricas, continua y cartesiana de la recta que pasa por los puntos A (2,–1,3) y B (5,0,–7).*

SOLUCION

Tomando como punto de referencia el A (2,–1,3) y vector director $\overrightarrow{AB}$ (3,1,–10) se obtienen las siguientes:

Paramétricas:
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 10t \end{cases}$$

Continua
$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-10}$$

Cartesianas
$$\begin{cases} x - 2 = 3y + 3 \\ -10x + 20 = 3z - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ 10x + 3z - 29 = 0 \end{cases}$$

9 *Escribir las ecuaciones paramétricas y cartesianas del plano que pasa por los puntos A (1,1,2), B (–1,3,5), C (4,–3,8).*

SOLUCION

Tomando como punto de referencia el A (1,1,2) y como base del subespacio los vectores $\vec{AB} = (-2,2,3)$ y $\vec{AC} = (3,-4,6)$ se obtienen:

Paramétricas $\begin{cases} x = 1 - 2\alpha + 3\beta \\ y = 1 + 2\alpha - 4\beta \\ z = 2 + 3\alpha + 6\beta \end{cases}$

Cartesiana $\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 3 \\ y-1 & 2 & -4 \\ z-2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 24x + 21y + 2z - 49 = 0$

10 *Escribir la ecuación de una recta contenida en el plano anterior.*

SOLUCION

Entre otras puede tomarse,por ejemplo, la recta AB de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 2 + 3\alpha \end{cases}$$

11 *Hallar un vector director de la recta*

$$\begin{cases} x - 2y + z - 5 = 0 \\ 3x + y - 3z + 9 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$v = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right) \quad v = (5,6,7)$$

12 *Escribir las ecuaciones paramétricas del plano $3x + 2y - 7z = 9$.*

SOLUCION

$$x = 3 - \frac{2}{3}y + \frac{7}{3}z$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2\alpha - 7\beta \\ y = 3\alpha \\ z = 3\beta \end{cases}$$

13 *Escribir la ecuación continua de una recta paralela por el origen a la de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 + 5t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

SOLUCION

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{1}$$

14 *Determinar k para que las dos rectas*

$$\begin{cases} 4x + 5y + 2z - 3 = 0 \\ x + 3y + 4z - 5 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + y + 2kz - 7 = 0 \\ 10x + 9y + \frac{k}{2}z + 9 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$v = \left(\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (14,-14,7)$$

$$w = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2k \\ 9 & k/2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2k & 5 \\ k/2 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{35k}{2}, \frac{35k}{2}, 35\right)$$

$$\frac{-\frac{35k}{2}}{14} = \frac{\frac{35\,k}{2}}{14} = \frac{35}{7} = \lambda \qquad \lambda = 5$$

$$-\frac{35\,k}{2} = 5\,.\,14 \qquad \Rightarrow \qquad k = -4$$

15 *Escribir la ecuación del plano paralelo al $2x - 5y + 3z = 4$ que pasa por el punto $(9,-7,5)$*

SOLUCION

$$2(x-9) - 5(y+7) + 3(z-5) = 0$$
$$2x - 5y + 3z = 68$$

16 *Escribir la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(8,6,-4)$ y es paralelo al*

$$\begin{cases} x = 3 - 2\alpha + 4\beta \\ y = -5 - \alpha - \beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

SOLUCION

$$\begin{cases} x = 8 - 2\alpha + 4\beta \\ y = 6 - \alpha - \beta \\ z = -4 + 2\alpha + \beta \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} x-8 & -2 & 4 \\ y-6 & -1 & -1 \\ z+4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-8) + 10(y-6) + 6(z+4) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 10y + 6z = 44$$

17 *Escribir las ecuaciones de dos rectas distintas que sean paralelas al plano del ejercicio n° 12 y que pasen por el punto $(-5,-3,2)$.*

SOLUCION

El plano del ejercicio 12 tiene como vectores definidores del subespacio

$(-2,3,0)$ y $(-7,0,3)$

por lo que las rectas pedidas pueden ser:

$$\frac{x+5}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{0} \qquad \frac{x+5}{-7} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{3}$$

18 *Del haz de planos definidos por los planos*

$2x - 3y + 5z - 3 = 0$ $\qquad$ $4x + y + 5z + 10 = 0$

seleccionar el que pasa por el punto $(-3,2,-1)$.

SOLUCION

Haz de planos

$$\alpha(2x - 3y + 5z - 3) + \beta(4x + y + 5z + 10) = 0$$

$$(2\alpha + 4\beta)x + (-3\alpha + \beta)y + (5\alpha + 5\beta)z + (-3\alpha + 10\beta) = 0$$

Para que pase por el punto $(-3,2,-1)$

$$(2\alpha + 4\beta)\overline{(-3) + (-3\alpha + \beta)}\, 2 + (5\alpha + 5\beta)(-1) + (-3\alpha + 10\beta) = 0$$
$$-20\alpha - 5\beta = 0$$
$$\beta = -4\alpha$$

con lo que el plano pedido es el de ecuación

$$(2\alpha - 16\alpha)\,x + (-3\alpha - 4\alpha)\,y + (5\alpha - 20\alpha)\,z + (-3\alpha - 40\alpha) = 0$$
$$-14\alpha\,x - 7\alpha\,y - 15\alpha\,z - 43\alpha = 0$$

que suprimiendo el fector de proporcionalidad α puede escribirse de la forma:

$$14x + 7y + 15z + 43 = 0$$

19 *Hallar el punto de intersección de la recta*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

con el plano $x + 3y = 0$

SOLUCION

Será el punto solución del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \text{que es el } \left(\frac{21}{26}, \frac{-7}{26}, \frac{23}{26}\right)$$

20 *Determinar la posición relativa y la intersección, si existe, de las rectas*

$$\begin{cases} 2x - y - z - 7 = 0 \\ 4x - 3y + 3z - 51 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ 3x + y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -7 \\ 4 & -3 & 3 & -51 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

que reducidas a forma triangular pueden escribirse

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang M = rang M' = 3 $\Rightarrow$ sistema compatible determinado, una sola solución.

Las rectas se cortan en un punto.

Además por M'

$$2z = 14 \quad \Rightarrow \quad z = 7$$
$$y + z = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 5 - 7 = -2$$
$$x - y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - 2 + 7 = 6$$

El punto intersección es el $(6,-2,7)$

En los problemas siguientes se considerarán los siguientes datos:

Puntos

$A = (1,2,3)$
$B = (-1,6,0)$
$C = (2,3,-4)$
$D = (0,0,1)$
$E = (4,0,5)$
$F = (2,4,-1)$

Rectas

$v)\quad \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z-1}{-5}$

$s)\quad \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{4}$

Planos

$\alpha)\quad 3x + 2y - 4z - 5 = 0$

$\beta)\quad 8x - y - z + 1 = 0$

$\gamma)\quad \begin{cases} x = -2\alpha + 8\beta \\ y = 4 + q + \beta \\ z = 4 + \alpha - \beta \end{cases}$

$$t)\ \begin{cases} x + 10y + z = 82 \\ -x + 2y + z = 22 \end{cases}$$

21 *Ecuación continua de la recta AB.*

SOLUCION

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-2}{6-2} = \frac{z-3}{0-3} \qquad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-3}$$

22 *Ecuación paramétrica del plano ABC.*

SOLUCION

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha(-1-1) + \beta(\ 2-1) \\ y = 2 + \alpha(\ 6-2) + \beta(\ 3-2) \\ z = 3 + \alpha(\ 0-3) + \beta(-4-3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - 2\alpha + \beta \\ y = 2 + 4\alpha + \beta \\ z = 3 - 3\alpha - 7\beta \end{cases}$$

23 *Ecuación cartesiana del plano ACD.*

SOLUCION

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 3 & 0 & y \\ 3 & -4 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-16x + 9y - z + 1 = 0$$

$$16x - 9y + z - 1 = 0$$

24 *Ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la recta v.*

SOLUCION

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-5}$$

25 *¿Son paralelas las rectas AB y s ? ¿Se cruzan ? ¿Se cortan ?. En este último caso hallar su punto de intersección.*

SOLUCION

Vector director de AB: $(-1-1, 6-2, 0-3) = (-2,4,-3)$
Vector director de s : $(1,-1,4)$

$$\frac{-2}{1} \neq \frac{4}{-1} \neq \frac{-3}{4} \qquad \text{No son paralelas.}$$

Para saber si se cortan o se cruzan, de acuerdo con 24 (p. 139), escribimos las ecuaciones cartesianas de las dos rectas

$$AB: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-3} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 4x - 4 = -2y + 4 \\ -3x + 3 = -2z + 6 \end{cases}$$

$$s: \quad \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{4} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 4x-28= & z \\ 4y-12= & -z \end{cases}$$

$$AB \begin{cases} 4x+2y=8 \\ -3x+2z=3 \end{cases} \qquad s \begin{cases} 4x-z=28 \\ 4y+z=12 \end{cases}$$

con lo que

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 28 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

rang M = 3 ; rang M' = 4

Por tanto las dos rectas se cruzan.

26 *¿ Son paralelos los planos ABC y α ?.*
En caso negativo hallar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los mismos.

SOLUCION

Ecuación cartesiana de ABC

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 2 & 6 & 3 & y \\ 3 & 0 & -4 & z \end{vmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 25x+17y+8z-77=0$$

Ecuación del plano α : $\qquad 3x+\ 2y-4z-\ 5=0$

Como $\dfrac{25}{3} \neq \dfrac{17}{2} \neq \dfrac{8}{-4} \neq \dfrac{-77}{-5}$ los planos no son paralelos.

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que definen resolveremos el sistema

$$\begin{cases} 25x+17y+8z-77=0 \\ 3x+\ 2y-4z-\ 5=0 \end{cases}$$

tomando $z=\lambda$ $\qquad \begin{cases} 25x+17y=-8\lambda+77 \\ 3x+\ 2y=\ 4\lambda+\ 5 \end{cases}$

y obtenemos

$$\begin{cases} x= & -69+84\lambda \\ y= & 106-124\lambda \\ z= & \lambda \end{cases}$$

27 *Hallar la ecuación del plano que pasa por E y es paralelo a β.*

SOLUCION

$8x-y-z+D=0$

$8.4-0-5+D=0 \quad \Rightarrow \quad 32-5+D=0 \quad \Rightarrow \quad D=-27$

Siendo la ecuación del plano: $\quad 8x-y-z-27=0$

28 *Hallar la ecuación de una recta que pase por F y sea paralela a γ.*

SOLUCION

Para que una recta sea paralela a γ, el vector director de la recta debe estar contenido en el subespacio definidor de γ, en nuestro caso, sirve cualquier vector director de la forma

$$\lambda(-2,1,1)+\mu(8,1,-1)$$

ya que los vectores $(-2,1,1)$ y $(8,1,-1)$ son los que definen al plano.

En particular son rectas por F paralelas a γ

$\lambda = 1$, $\mu=0$ $\qquad$ $\lambda=1$, $\mu=1$ $\qquad$ $\lambda=1$, $\mu=-1$

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{1} \qquad \frac{x-2}{8}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-1} \qquad \frac{x-2}{6}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{0}$$

29 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a α y β.*

SOLUCION

Plano α

$$3x+2y-4z-5=0$$

en paramétricas

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{3}-\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{4}{3}\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Plano β

$$8x-y-z+1=0$$

en paramétricas

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\alpha+\dfrac{1}{8}\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$$

Base del subespacio correspondiente a α

$$\left(-\frac{2}{3},1,0\right) \quad \left(\frac{4}{3},0,1\right)$$

Base del subespacio correspondiente a β

$$\left(\frac{1}{8},1,0\right) \quad \left(\frac{1}{8},0,1\right)$$

Para que una recta sea paralela a ambos planos su vector director (a,b,c) debe pertenecer a ambos subespacios, por lo que

$$\begin{vmatrix} -2/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1/8 & 1 & 0 \\ 1/8 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$a+\frac{2}{3}b-\frac{4}{3}c=0 \qquad a-\frac{1}{8}b-\frac{1}{8}c=0$$

$$a=\frac{6}{19}\lambda \qquad b=\frac{29}{19}\lambda \qquad c=\lambda$$

Así pues puede tomarse como vector director (6,29,19) y la recta por B será:

$$\frac{x+1}{6}=\frac{y-6}{29}=\frac{z}{19}$$

30 *Se considera el tetraedro de vértices los puntos A,B,C,D. Hallar las ecuaciones de sus caras y de sus aristas.*

SOLUCION

Cara ABC (Problema 22)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & x \\ 2 & 6 & 3 & y \\ 3 & 0 & -4 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$25x+17y+6z-77=0$$

Cara ACD (Problema 23)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & x \\ 2 & 3 & 0 & y \\ 3 & -4 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$$16x-9y+z-1=0$$

Cara ABD

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 6 & 0 & y \\ 3 & 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$14x + y - 8z + 8 = 0$

Cara BCD

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & x \\ 6 & 3 & 0 & y \\ 0 & -4 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$$

$27x + 7y + 15z - 15 = 0$

Arista AB

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-3}$$

Arista AC

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-7}$$

Arista AD

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-2}$$

Arista BC

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z}{-4}$$

Arista BD

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-6}{-6} = \frac{z}{1}$$

Arista CD

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+4}{5}$$

31 *Considerando el tetraedro de véritces los puntos B,C,E y F hallar los vértices del tetraedro cuyas caras son los planos paralelos a las caras del dado por los vértices opuestos a las mismas.*

SOLUCION

Plano por B paralelo a CEF.

$$\begin{cases} x = -1 + \alpha(4-2) + \beta(2-2) = -1 + 2\alpha \\ y = \ \ 6 + \alpha(0-3) + \beta(4-3) = \ \ 6 - 3\alpha + \ \beta \\ z = \ \ 0 + \alpha(5+4) + \beta(-1+4) = \qquad 9\alpha + 3\beta \end{cases}$$

$9x + 3y - z - 9 = 0$
plano I

Plano por C paralelo a BEF

$$\begin{cases} x = \ \ 2 + \alpha(4+1) + \beta(2+1) \ \ = \ 2 + 5\alpha + 3\beta \\ y = \ \ 0 + \alpha(0-6) + \beta(\ 4-6) = \ 3 - 6\alpha - 2\beta \\ z = -4 + \alpha(5-0) + \beta(-1-0) = -4 + 5\alpha - \beta \end{cases}$$

$4x + 5y + 2z - 15 = 0$
plano II

Plano por E paralelo a BCF

$$\begin{cases} x = 4 + \alpha(2+1) + \beta(2+1) = 4 + 3\alpha + 3\beta \\ y = 0 + \alpha(3-6) + \beta(4-6) = \quad -3\alpha \ - 2\beta \\ z = 5 + \alpha(-4-0) + \beta(-1-0) = 5 - 4\alpha - \ \beta \end{cases}$$

$5x + 9y - 3z - 5 = 0$
plano III

Plano por F paralelo a BCE

$$\begin{cases} x = \ \ 2 + \alpha(2+1) + \beta(4+1) = \ \ 2 + 3\alpha + 5\beta \\ y = \ \ 4 + \alpha(3-6) + \beta(0-6) = \ \ 4 - 3\alpha - 6\beta \\ z = -1 + \alpha(-4-0) + \beta(5-0) = -1 - 4\alpha + 5\beta \end{cases}$$

$39x + 35y + 3z - 215 = 0$
plano IV

Vértice $\mathrm{I} \cap \mathrm{II} \cap \mathrm{III}$

$$\begin{cases} 9x + 3y - \ z - \ 9 = 0 \\ 4x + 5y + 2z - 15 = 0 \\ 5x + 9y - 3z - \ 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad (1,1,3)$$

Vértice $\mathrm{I} \cap \mathrm{II} \cap \mathrm{IV}$

$$\begin{cases} 9x + \ 3y - \ z - \ \ 9 = 0 \\ 4x + \ 5y + 2z - \ 15 = 0 \\ 39x + 35y + 3z - 215 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = \ 13 \\ z = -15 \end{cases} \qquad (-5,13,-15)$$

Vértice $\mathrm{I} \cap \mathrm{III} \cap \mathrm{IV}$

$$\begin{cases} 9x + \ 3y - \ z - \ \ 9 = 0 \\ 5x + \ 9y - 3z - \ \ 5 = 0 \\ 39x + 35y + 3z - 215 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ 1 \\ y = \ 4 \\ z = 12 \end{cases} \qquad (1,4,12)$$

Vértice $\overline{II \cap III \cap IV}$

$$\begin{cases} 4x + 5y + 2z - 15 = 0 \\ 5x + 9y - 3z - 5 = 0 \\ 39x + 35y + 3z - 215 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases} \quad (10,-5,0)$$

32 ***Hallar la ecuación continua de la recta intersección de α y β·***

SOLUCION

α: $3x + 2y - 4z - 5 = 0$

β: $8x - y - z + 1 = 0$

Resolviendo el sistema con z arbitrario

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 + 4z \\ 8x - y = -1 + z \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{19} + \dfrac{6}{19}\lambda \\[2mm] y = \dfrac{43}{19} + \dfrac{29}{19}\lambda \\[2mm] z = \lambda \end{cases}$$

de donde la ecuación continua

$$\frac{x - \dfrac{3}{19}}{\dfrac{6}{19}} = \frac{y - \dfrac{43}{19}}{\dfrac{29}{19}} = \frac{z}{1}$$

33 ***Hallar las coordenadas del punto de intersección de los tres planos α, β y γ.***

SOLUCION

Ecuación cartesiana del plano γ :

$$\begin{vmatrix} x & -2 & 8 \\ y-4 & 1 & 1 \\ z-4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -2x + 6(y-4) - 10(z-4) = 0 \\ x - 3y + 5z - 8 = 0 \end{matrix}$$

Se trata ahora de resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \\ 8x - y - z + 1 = 0 \\ x - 3y + 5z - 8 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $x = \dfrac{45}{7}, y = \dfrac{228}{7}, z = \dfrac{139}{7}$ siendo pues la intersección $\dfrac{45}{7}, \dfrac{228}{7}, \dfrac{139}{7}$

34 ***Hallar la ecuación del plano que pasa por D y es paralelo a β.***

SOLUCION

De acuerdo con la expresión

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0$$

resulta

$$8x - y - (z - 1) = 0$$
$$8x - y - z + 1 = 0$$

que es el propio plano β. Así pues, $D \in \beta$.

35 *Hallar la ecuación de una recta que esté contenida en el plano γ.*

SOLUCION

Para escribir la ecuación de una recta contenida en el plano γ basta tomar un punto cualquiera de dicho plano y considerar la recta que pasa por este punto y tiene por dirección cualquier vector de los del subespacio definidor de γ.

Así, como γ está dado por sus ecuaciones paramétricas, podría ser

$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases} \qquad \text{o también} \qquad \begin{cases} x = 8\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 4 - \lambda \end{cases}$$

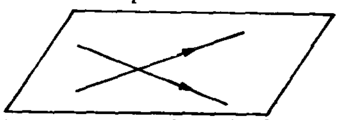
tomando como vectores directores de la recta en un caso y otro uno de los definidores del plano. También podría tomarse cualquier vector combinación lineal de los $(-2,1,1)$ y $(8,1,-1)$, por ejemplo, $(6,2,0)$ y otra recta sería:

$$\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

36 *Hallar la ecuación del plano determinado por las rectas v y s.*

SOLUCION

La ecuación de un plano determinado por dos rectas



puede escribirse por medio del punto intersección de las dos rectas y las direcciones de estas.

En nuestro caso las direcciones de las dos rectas vienen dadas por los vectores:

$$(4,2,-5) \qquad (1,-1,4)$$

y como

$$\frac{4}{1} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-5}{4}$$

definen efectivamente un subespacio de dimensión 2, es decir, no son paralelas.

El punto de intersección puede hallarse planteando la igualdad en las expresiones paramétricas de las dos rectas (también puede hacerse en su forma cartesiana).

$$\begin{cases} 3 + 4\alpha = 7 + \alpha' \\ 5 + 2\alpha = 3 - \alpha' \\ 1 - 5\alpha = 4\alpha' \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} 4\alpha - \alpha' = 4 \\ 2\alpha + \alpha' = -2 \\ -5\alpha - 4\alpha' = -1 \end{cases}$$

sistema incompatible ya que

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

No hay, pues, punto intersección. Las rectas se cruzan y no determinan ningún plano.

37 *Hallar la ecuación de la recta que pasa por F y es paralela a t.*

SOLUCION

$$t \begin{cases} x + 10y + z = 82 \\ -x + 2y + z = 22 \end{cases}$$

Vector director de t

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{o sea} \quad (8,-2,12) \quad \text{o también} \quad (4,-1,6)$$

La recta por F paralela a t será:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{6}$$

38 ***De las tres rectas v, s y t, ¿son paralelas dos de ellas? ¿Se cruzan? ¿Se cortan? En este último caso hallar el punto de intersección.***

SOLUCION

En primer lugar pasamos las ecuaciones de las rectas v y s de la forma continua a la cartesiana

$$v: \frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-5} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 4y - 20 \\ -5x + 15 = 4z - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 5x + 4z - 19 = 0 \end{cases}$$

$$s: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{4} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 28 = z \\ 4y - 12 = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - z - 28 = 0 \\ 4y + z - 12 = 0 \end{cases}$$

Siendo t

$$t: \begin{cases} x + 10y + z = 82 \\ -x + 2y + z = 22 \end{cases}$$

la posición relativa puede estudiarse mediante el rango de las matrices de los sistemas respectivos (n° 24, pag 139). Así tenemos:

v y s

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 5 & 0 & 4 & 19 \\ 4 & 0 & -1 & 28 \\ 0 & 4 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

rang M = 3 rang M' = 4 Se cruzan

v y t

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -7 \\ 5 & 0 & 4 & 19 \\ 1 & 10 & 1 & 82 \\ -1 & 2 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

rang M = 3 rang M' = 4 Se cruzan

s y t

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & 28 \\ 0 & 4 & 1 & 12 \\ 1 & 10 & 1 & 82 \\ -1 & 2 & 1 & 22 \end{pmatrix}$$

rang M = 3 rang M' = 4 Se cruzan

39 ***Hallar la ecuación de un plano que contenga a la recta s.***

SOLUCION

Para escribir la ecuación de un plano que contenga a una recta

basta tomar un punto de la recta, un vector director de la dirección de la recta y otro vector cualquiera no dependiente del anterior.

En nuestro caso:

Punto de la recta s: (7,3,0)

Vector dirección de s: $v = (1,-1,4)$

Otro vector cualquiera no dependiente del anterior: $w = (1,1,4)$

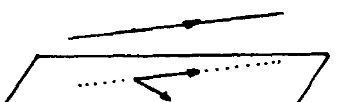
Ecuación de un plano en las condiciones pedidas

$$\left\{\begin{array}{l} x = 7 + \alpha + \beta \\ y = 3 - \alpha + \beta \\ z = 0 + 4\alpha + 4\beta \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad 4x - z - 28 = 0$$

40 *Hallar la ecuación de un plano que sea paralelo a la recta v.*

SOLUCION

Para escribir la ecuación de un plano paralelo a una recta dada



basta que el subespacio que define el plano contenga al vector director de la recta, luego como base de dicho subespacio se puede tomar el vector director de la recta y otro cualquiera no dependiente de él. Si además se desea que la recta no esté contenida en el plano basta tomar un punto que no sea de la recta para escribir la ecuación del plano.

En nuestro caso:

Punto que no ~~sea~~ de v: (0,0,0)

Vector director de v: $v = (4,2,-5)$

Otro vector no dependiente de v : $w = (1,0,0)$

Ecuación del plano pedido:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4\alpha + \beta \\ y = 2\alpha \\ z = -5\alpha \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad 5y + 2z = 0$$

41 *El punto (2,3,5), ¿pertenece a la recta v ? ¿Y el (–1,3,6)?*

SOLUCION

El punto (2,3,5) no pertenece a la recta v porque no satisface su ecuación.

El punto (–1,3,6) sí pertenece a la recta v.

42 *Hallar el punto de intersección de la recta s con el plano γ.*

SOLUCION

Recta s, en cartesianas (problema 5.38) $\left\{\begin{array}{l} 4x - z = 28 \\ 4y + z = 12 \end{array}\right.$

Plano γ , en cartesianas (problema 5.33) $\qquad x - 3y + 5z = 8$

Para hallar el punto de intersección hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x \qquad - z = 28 \\ \quad 4y + z = 12 \\ x - 3y + 5z = 8 \end{cases}$$

cuya solución es $\quad x = \dfrac{89}{12} \qquad y = \dfrac{31}{12} \qquad z = \dfrac{20}{12}$

por lo que el punto intersección es

$$\left(\frac{89}{12} , \frac{31}{12} , \frac{20}{12} \right)$$

43 *Hallar x para que la recta que une los puntos A y (–2,x,0) sea paralela a BC.*

SOLUCION

Llamando P a (–2,4,0), para que la recta que pase por A y P sea paralela a la que pasa por B y C debe ser, $\vec{AP} = \lambda . \vec{BC}$, es decir:

A (1,2,3) P(–2,x,0) $\Rightarrow$ $\vec{AP}(-3, x-2, -3)$
B (–1,6,0) C(2,3,–4) $\Rightarrow$ $\vec{BC}(3,-3,-4)$

$$(-3, x-2, -3) = \lambda . (3,-3,-4)$$

$$\begin{cases} -3 = \lambda.3 & \Rightarrow \quad \lambda = -1 \\ x - 2 = \lambda.(-3) & \\ -3 = \lambda.(-4) & \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

lo cual es imposible.

44 *Hallar el plano que pasa por la recta intersección de α y γ y el punto (2,–3,1).*

SOLUCION

Ecuación cartesiana de γ (problema 5.33) $\qquad x - 3y + 5z = 8$
Ecuación cartesiana de α $\qquad 3x + 2y - 4z = 5$
Haz de planos determinado por α y γ.

$$(3\lambda + \mu)\, x + (2\lambda - 3\mu)\, y + (-4\lambda + 5\mu)\, z = 5\lambda + 8\mu$$

Si el plano del haz pedido tiene que pasar por (2,–3,1) debe verificarse:

$$(3\lambda + \mu).2 + (2\lambda - 3\mu).(-3) + (-4\lambda + 5\mu).1 = 5\lambda + 8\mu$$

de donde

$$-9\lambda + 8\mu = 0 \qquad \lambda = \frac{8}{9}\mu$$

y una solución particular tomando $\mu = 9$

$$\lambda = 8 \quad , \quad \mu = 9$$

con lo que el plano pedido será:

$$33x - 11y + 13z = 112$$

(Las otras soluciones de $\lambda = 8/9\, \mu$ dan lugar a ecuaciones con coeficientes proporcionales).

45 *Hallar las nuevas coordenadas o ecuaciones de E, s y g en el nuevo sistema de referencia del ejercicio 5.6*

SOLUCION

a) Para el punto E, aplicando la ecuación matricial del cambio del problema 5.6 al punto E (4,0,5) obtenemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0-2 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{6}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{2}{2} + \frac{6}{2} \\ -\frac{3}{2} - \frac{2}{2} + \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es decir, E en el nuevo sistema es el punto de coordenadas $-\frac{5}{2}, \frac{11}{2}, \frac{1}{2}$

b) Según el problema 5.6 las ecuaciones del cambio pueden escribirse:

$$\begin{cases} x = 1 + x' + y' \\ y = 2 + x' + z' \\ z = -1 + y' + z' \end{cases}$$

por lo que escribiendo las ecuaciones cartesianas de s : $\begin{cases} 4x - z = 28 \\ 4y + z = 12 \end{cases}$

las ecuaciones en el nuevo sistema serán

$$\begin{cases} 4(1 + x' + y') - (-1 + y' + z') = 28 \\ 4(2 + x' + z') + (-1 + y' + z') = 12 \end{cases}$$

o simplificando

$$\begin{cases} 4x' + 3y' - z' = 23 \\ 4x' + y' + 5z' = 5 \end{cases}$$

c) Por la misma razón el plano β de ecuación $8x - y - z + 1 = 0$ se transforma en el de ecuación

$$8(1 + x' + y') - (2 + x' + z') - (-1 + y' + z') + 1 = 0$$

o bien

$$7x' + 7y' - 2z' + 8 = 0$$

CAPITULO VI
Espacio euclideo tridimensional

1 *Dados los vectores* $u = (2,-5,3)$ $v = (4,-3,2)$ *y* $w = (0,2,-7)$, *calcular los productos escalares* u.v , u.w , v.w.

SOLUCION

$$u.v = (2,-5,3).(4,-3,2) = 8 + 15 + 6 = 29$$
$$u.w = (2,-5,3).(0,2,-7) = 0 - 10 - 21 = -31$$
$$v.w = (4,-3,2).(0,2,-7) = 0 - 6 - 14 = -20$$

2 *Determinar el módulo de los siguientes vectores:* $(2,-5,4)$, $(5,6,-4)$ *y* $(3,-1,0)$.

SOLUCION

$$\|(2,-5,4)\| = +\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2} = +\sqrt{4 + 25 + 16} = +\sqrt{45} = +3\sqrt{5}$$
$$\|(5,6,-4)\| = +\sqrt{25 + 36 + 16} = +\sqrt{77}$$
$$\|(3,-1,0)\| = +\sqrt{9 + 1 + 0} = +\sqrt{10}$$

3 *Escribir tres vectores que sean ortogonales al* $(2,-5,3)$.

SOLUCION

Deben ser vectores (x,y,z) tales que $(2,-5,3).(x,y,z) = 2x - 5y + 3z = 0$

Hay que buscar pues soluciones a la anterior ecuación, o lo que es lo mismo al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

$\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\Rightarrow$ $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$ esto es $(1,1,1)$

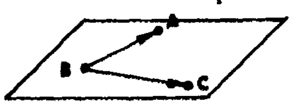
$\alpha = 2$ $\beta = 0$ $\Rightarrow$ $x = 5$ $y = 2$ $z = 0$ esto es $(5,2,0)$

$\alpha = 0$ $\beta = 2$ $\Rightarrow$ $x = -3$ $y = 0$ $z = 2$ esto es $(-3,0,2)$

4 *Escribir un vector que sea ortogonal al subespacio definidor del plano* $x - 2y + 3z - 7 = 0$

SOLUCION

Para hallar dicho vector debe hallarse una base del subespacio definidor del plano. Para ello podemos escoger dos vectores cualesquiera determinados por tres puntos del plano, con tal que dichos vectores sean linealmente independientes.



Tres puntos del plano $x - 2y + 3z - 7 = 0$

$A\,(0,0,\frac{7}{3})$ $\qquad$ $B\,(0,-\frac{7}{2},0)$ $\qquad$ $C\,(7,0,0)$

que determinan los vectores $\overrightarrow{BA}$ $(0,\frac{7}{2},\frac{7}{3})$ y $\overrightarrow{BC}$ $(7,\frac{7}{2},0)$.

Estos vectores son linealmente independientes

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{3} & 0 \end{pmatrix} = 2$$

luego forman base del subespacio definidor del plano.

El vector (x,y,z) pedido deberá cumplir pues:

$$\left\{\begin{array}{l} (0,\frac{7}{2},\frac{7}{3})\,.\,(x,y,z) = 0 \\ (7,\frac{7}{2},0\,)\,.\,(x,y,z) = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{7}{2}y + \frac{7}{3}z = 0 \\ 7x + \frac{7}{2}y = 0 \end{array}\right.$$

sistema cuyas soluciones pueden expresarse en la forma

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{3}{2}\lambda \end{array}\right.$$

Así un vector puede ser, por ejemplo, tomando $\lambda = 2$

$x = -1$, $y = 2$, $z = -3$ $\Rightarrow$ $(-1,2,-3)$

5 *Hallar un vector unitario dependiente linealmente del vector (3,3,−4).*

SOLUCION

Según la proposición 5.2 puede tomarse $\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$, en nuestro caso

$\|(3,3,-4)\| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$ y el vector será el $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{-4}{\sqrt{34}}\right)$

6 *Dados los vectores ortogonales* $\mathbf{v} = (2,1,2)$ *y* $\mathbf{w} = (3,-2,-2)$ *hallar otro que con ellos determine un sistema de referencia ortogonal.*

SOLUCION

Sea $\mathbf{u} = (x,y,z)$ el vector pedido. Debe cumplirse:

$\mathbf{v}.\mathbf{w} = (2,1,2).(3,-2,-2) = 6-2-4 = 0$ (efectivamente v y w son ortogonales)

$\mathbf{v}.\mathbf{u} = (2,1,2).\,(x,y,z) = 2x + y + 2z = 0$

$\mathbf{w}.\mathbf{u} = (3,-2,-2).(x,y,z) = 3x - 2y - 2z = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos últimas igualdades se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = -\frac{7}{2}\lambda \end{array}\right. \Rightarrow \quad \mathbf{u} \text{ es de la forma } (\lambda\,,\,5\lambda\,,\,-\frac{7}{2}\lambda)$$

En particular puede ser: $\mathbf{u} = (2,10,-7)$.

7 *Con los vectores del ejercicio anterior formar una base ortonormal.*

SOLUCION

Como ya forman una base ortogonal basta con hallar aquellos vectores unitarios dependientes lineal y respectivamente de cada uno de ellos:

$\| (2,1,2) \| = 3 \qquad \| (3,-2,-2) \| = \sqrt{17} \qquad \| (2,10,-7) \| = 3\sqrt{17}$

Así la base será:

$$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \quad \left(\frac{3}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}},-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) \quad \left(\frac{2}{3\sqrt{17}},\frac{10}{3\sqrt{17}},-\frac{7}{3\sqrt{17}}\right)$$

8 *Hallar los ángulos de los vectores del problema 1 tomados dos a dos.*

SOLUCION

$\| \mathbf{u} \| = \sqrt{38} \qquad \| \mathbf{v} \| = \sqrt{99} \qquad \| \mathbf{w} \| = \sqrt{53}$

$$\cos \widehat{\mathbf{u},\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \|} = \frac{29}{\sqrt{1.102}} \cong 0'8736$$

arc cos $0'8736 \cong 0'508$ radianes ó $29^\circ\ 7'$

$$\cos \widehat{\mathbf{u},\mathbf{w}} = \frac{-31}{\sqrt{38}\sqrt{53}} = -\frac{31}{\sqrt{2.014}} \cong -0'6908$$

arc cos $-0'6908 \cong 2'333$ radianes ó $133^\circ\ 41'$

$$\cos \widehat{\mathbf{v},\mathbf{w}} = -\frac{20}{\sqrt{29}\sqrt{53}} = -\frac{20}{\sqrt{1.537}} \cong -0'5101$$

arc cos $-0'5101 \cong 2'107$ radianes ó $120^\circ\ 40'$

9 *Calcular los cosenos directores del vector (2,2,−2) y deducir de ellos el valor de sus ángulos directores.*

SOLUCION

$$\| (2,2-2) \| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0'5774 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0'955 \text{ radianes ó } 54^\circ\ 44'$$

$$\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha$$

$$\cos\gamma = -\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0'5774 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2'186 \text{ radianes ó } 125^\circ\ 16'$$

10 *Dados los vectores* $\mathbf{u} = (3,-1,4)$ $\mathbf{v} = (-1,3,-2)$ *y* $\mathbf{w} = (5,0,2)$ *calcular* $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$ *y* $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$.

SOLUCION

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 3 & -1 \\ \mathbf{j} & -1 & 3 \\ \mathbf{k} & 4 & -2 \end{vmatrix} = -10\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k} = (-10,2,8)$$

(formalmente)

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 3 & 5 \\ \mathbf{j} & -1 & 0 \\ \mathbf{k} & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\,\mathbf{i} + 14\,\mathbf{j} + 8\,\mathbf{k} = (-2,14,5)$$

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & -1 & 5 \\ \mathbf{j} & 3 & 0 \\ \mathbf{k} & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\,\mathbf{i} - 8\,\mathbf{j} - 15\,\mathbf{k} = (6,-8,-15)$$

11 *Calcular el producto mixto de los tres vectores del ejercicio anterior.*

SOLUCION

$$\mathbf{u}.(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -34$$

12 *Hallar la ecuación continua de una recta que pasando por el punto $(2,-1,5)$ sea perpendicular a la recta de ecuación $(x,y,z) = (-5,6,2) + \lambda\,(3,-1,2)$.*

SOLUCION

Bastará determinar un vector director de la recta pedida que deberá ser un vector (a,b,c) perpendicular al (3,1,–2), director de la otra recta,

$$(a,b,c)\,.\,(3,1,-2) = 3a + b - 2c = 0$$

Existen tantas soluciones como soluciones de la ecuación planteada. Una solución particular puede ser

$$a = 2 \quad b = 0 \quad c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad (2,0,3)$$

con lo que la ecuación sería:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-5}{3}$$

13 *Averiguar si la recta dada como dato en el ejercicio anterior y la de ecuaciones*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + 5y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

son perpendiculares.

SOLUCION

Para averiguar si son perpendiculares debe verificarse si sus vectores directores son ortogonales, por lo que debe hallarse el vector director de la recta dada que es el vector

$$\left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) = (4\,,7\,,13)$$

Siendo (3,1,–2) el vector director de la otra recta debe comprobarse cuál es el valor del producto escalar de ambos

$$(3,1,-2)\,.\,(4,7,13) = 12 + 7 - 26 = -7 \neq 0$$

Las rectas no son perpendiculares.

14 *Hallar la ecuación de la recta que pasando por el punto $(2,-5,3)$ es perpendicular al plano de ecuaciones paramétricas*

$$\begin{cases} x = 2 - 3\alpha + 5\beta \\ y = \quad 4\alpha - \beta \\ z = \quad \alpha + 2\beta \end{cases}$$

SOLUCION

Siendo la ecuación vectorial del plano

$$\mathbf{x} = (2,0,0) + \alpha\,(-3,4,1) + \beta\,(5,-1,2)$$

el vector director asociado al mismo (definición 13.1) será

$$(-3,4,1) \quad (5,-1,2) = (9,11,-17)$$

y la ecuación de la recta pedida será:

$$\mathbf{x} = (2,-5,3) + \lambda\,(9,11,-17) \qquad \text{o bien} \quad \begin{cases} x = \;\; 2 + \;\; 9\lambda \\ y = -5 + 11\,\lambda \\ z = \;\; 3 - 17\,\lambda \end{cases}$$

15 ***Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta que une los puntos (2,−1,3) y (−4,2,2) en su punto medio.***

SOLUCION

El vector que une los dos puntos será un vector director asociado al plano

$$(-4-2,\, 2+1,\, 2-3) = (-6,\, 3,\, -1)$$

El punto medio de los dos puntos es el punto $(-1,\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ por lo que la ecuación será:

$$(x+1).(-6) + (y - \frac{1}{2}).\,3 + (z - \frac{5}{2})\,.\,(-1) = 0$$

$$-6x + 3y - z - 5 = 0$$

16 ***Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos (1,−2,2) (−3,1,−2) y es perpendicular al plano $x - 2y - 5z + 3 = 0$***

SOLUCION

El vector director asociado al plano pedido deberá ser ortogonal al vector determinado por los dos puntos del plano

$$(1+3\,,\,-2-1\,,\,2+2\,) = (4,-3,4)$$

y al vector director asociado al otro plano

$$(1,-2,5)$$

por lo que, llamándole (a,b,c), deberá cumplir

$$\begin{cases} (4,-3,\;\;4).\,(a,b,c) = 0 \\ (1,-2,-5).\,(a,b,c) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4a - 3b + 4c = 0 \\ \;\; a - 2b - 5c = 0 \end{cases}$$

Entre las soluciones de este sistema $a = -\frac{23}{5}\,c$, $b = -\frac{24}{5}\,c$, $c = c$, se puede tomar la $a = -23$, $b = -24$, $c = 5$: $(-23, -24, 5)$ y la ecuación del plano será:

$$\mathbf{v}\,.\,(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

$$-23\,(x-1) - 24\;9\,y + 2) + 5\,(z-2) = 0$$

$$23x + 24y - 5z + 35 = 0$$

17 ***Hallar la ecuación general del plano $(x,y,z) = (2,3,1) + \alpha\,(-5,4,-1) + \beta\,(3,2,-1)$.***

SOLUCION

Vector director del plano

$$(-5,4,1) \wedge (3,2,-1) = (-2,-8,-22)$$

Ecuación general $(x - a) \cdot v = 0$

$$(x-2, y-3, z-1) \cdot (-2,-8,-22) = 0$$

$$-2x + 4 - 8y + 24 - 22z + 22 = 0$$

$$-2x - 8y - 22z + 50 = 0$$

$$x + 4y + 11z - 25 = 0$$

18 *Determinar las coordenadas polares y cilíndricas del punto (0,–2,–2).*

SOLUCION

Polares

$$\rho = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0^2 + (-2)^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{x_1} = \frac{-2}{0} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ ó } 270^\circ$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{-2} = \frac{\sqrt{0^2 + (-2)^2}}{-2} = \frac{\sqrt{4}}{-2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \frac{3\pi}{4} \text{ ó } 135^\circ$$

$$\boxed{(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})}$$

Cilíndricas

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2}{x_1} = \frac{-2}{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3\pi}{2} \quad \text{ó} \quad 270^\circ$$

$$x_3 = -2$$

$$\boxed{(2, \frac{3\pi}{2}, -2)}$$

19 *Determinar las coordenadas rectángulares y cilíndricas del punto que en polares es (4,210° 30°).*

SOLUCION

Rectángulares

$$x_1 = \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta = 4. \cos 210^\circ . \operatorname{sen} 30^\circ = 4. (-\frac{\sqrt{3}}{2}). \frac{1}{2} = -\sqrt{3}$$

$$x_2 = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta = 4. \operatorname{sen} 210^\circ . \operatorname{sen} 30^\circ = 4.(-\frac{1}{2}). \frac{1}{2} = -1$$

$$x_3 = \rho \cos \vartheta = 4 . \cos 30^\circ = 4 . \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{(-\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})}$$

Cilíndricas

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(-\sqrt{3}) + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$\alpha = \varphi$ de polares $= 210^\circ$

$x_3 = 2\sqrt{3}$

$$\boxed{(2\ ,\ 210^\circ\ ,\ 2\sqrt{3}\ )}$$

20 *Determinar las coordenadas rectángulares y polares del punto que en cilíndricas es (6, 120° –2).*

SOLUCION

Rectangulares

$$x_1 = 6\ .\cos 120^\circ = 6\ .\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$$

$$x_2 = 6\ .\operatorname{sen} 120^\circ = 6.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$x_3 = -2$$

$$\boxed{(-3\ ,\ 3\sqrt{3}\ ,\ -2)}$$

Polares

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{9 + 27 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\operatorname{tg}\ \varphi = \frac{3\sqrt{3}}{-3} = -\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \ \varphi = 120^\circ$$

$$\operatorname{tg}\ \vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} = \frac{\sqrt{9+27}}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \qquad \Rightarrow \ \vartheta = \operatorname{arctg}(-3) \cong 108^\circ\ 26'$$

$$\boxed{(2\sqrt{10}\ ,\ 120^\circ\ ,\ 108^\circ\ 26')}$$

21 *¿Cuál sería la ecuación en coordenadas polares del plano $x + 2y - z + 5 = 0$?.*

SOLUCION

$$\rho \cos\varphi\ \operatorname{sen}\vartheta + 2\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta - \rho\cos\vartheta + 5 = 0$$

$$\rho\,(\cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta + 2 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta - \cos\vartheta\,) = -5$$

22 *Determinar la proyección ortogonal del punto (2,–3,4) sobre la recta*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

Vector director de la recta

$$\left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (4, 8, 4)$$

o también $\quad \dfrac{1}{4}\,.\,(4,8,4) = (1,2,1)$

Plano por (2,–3,4) perpendicular a la recta dada

$$1\ .\ (x-2) + 2\ .\ (y+3) + 1\ ,\ (z-4) = 0$$

$$x - 2 + 2y + 6 + z - 4 = 0$$

$$x + 2y + z = 0$$

Intersección de este plano con la recta dada

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Cuya solución $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ $z = -\frac{1}{2}$ nos da el punto proyección ortogonal:

$$P = (\frac{1}{2}, \ 0 \ , -\frac{1}{2})$$

23 ***El vector*** $[\overrightarrow{AB}] = (4,-2,5)$ ***y el vector director de una recta v forman un ángulo de 30°. ¿ Cuál es el módulo de la proyección ortogonal de*** $[\overrightarrow{AB}]$ ***sobre v ?.***

SOLUCION

$$\| [\overrightarrow{A'B'}] \| = \| [\overrightarrow{AB}] \| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 5^2} \ . \cos 30^\circ =$$
$$= \sqrt{16 + 4 + 25} \ . \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{2} \cong 5'81$$

24 ***Determinar la ecuación continua de la recta proyección ortogonal de***

$$\begin{cases} x - 2y + 5z - 9 = 0 \\ -2x + 3y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

sobre el plano $2x + 2y - z + 6 = 0$.

SOLUCION

El haz de planos cuya arista es la recta dada es:

$$\alpha (x - 2y + 5z - 9) + \beta (-2x + 3y + z +) = 0$$
$$(\alpha - 2\beta)\, x + (-2\alpha + 3\beta)\, y + (5\alpha + \beta)\, z + (-9\alpha + 3\beta) = 0$$

De los planos del haz, determinemos el que sea perpendicular al plano $2x + 2y - z + 6 = 0$ para ello los vectores directores asociados respectivos deben ser ortogonales.

$$(2,2,-1) . (\alpha - 2\beta \ , \ -2\alpha + 3\beta \ , \ 5\alpha + \beta) = 0$$
$$2.(\alpha - 2\beta) + 2 , (-2\alpha + 3\beta) - 1 . (5\alpha + \beta) = 0$$
$$2\alpha - 4\beta - 4\alpha + 6\beta - 5\alpha - \beta = 0$$
$$-7\alpha + \beta = 0$$
$$\beta = 7\alpha$$

por lo que el plano del haz perpendicular al plano $2x + 2y - z + 6 = 0$ será:

$$(\alpha - 14\alpha)\, x + (-2\alpha + 21\alpha)\, y + (5\alpha + 7\alpha)\, z + (-9\alpha + 21\alpha) = 0$$
$$-13\alpha\, x + 19\alpha\, y + 12\alpha\, z + 12\alpha = 0$$

de donde, simplificando el factor de proporcionalidad α :

$$-13x + 19y + 12z + 12 = 0$$

Según definición, la intersección de este plano con el plano dado será la recta proyección, cuyas ecuaciones cartesianas serían pues:

$$\begin{cases} -13x + 19y + 12z + 12 = 0 \\ 2x + 2y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

Para escribir su ecuación continua hallamos su vector director

$$\left(\begin{vmatrix} 19 & 12 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 12 & -13 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -13 & 19 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) \longrightarrow (-43, 11, -64)$$

y un punto. Para hallarlo se toma, por ejemplo, $z = 0$ resultando el sistema

$$\begin{cases} -13x + 19y + 12 = 0 \\ 2x + 2y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{45}{32} \qquad y = -\frac{51}{32} \qquad (-\frac{45}{32}, -\frac{51}{32}, 0)$$

y la ecuación continua será:

$$\frac{x+\frac{45}{32}}{-43}=\frac{y+\frac{51}{32}}{11}=\frac{z}{-64}$$

25 *Dados los puntos $A = (2,-1,3)$ $B = (0,4,-1)$ y $C = (2,3,7)$ hallar las distancias entre ellos tomados dos a dos.*

SOLUCION

$$d(A\,,B)=\sqrt{(0-2)^2+(4+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{4+25+16}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$
$$d(A\,,C)=\sqrt{(2-2)^2+(3+1)^2+(\;7-3)^2}=\sqrt{0+16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$d(B\,,C)=\sqrt{(2-0)^2+(3-4)^2+(\;7+1)^2}=\sqrt{4+\;1+64}=\sqrt{69}$$

26 *Hallar la distancia del punto $(2,-1,3)$ al plano $3x+2y+3z+5=0$*

SOLUCION

$$d=\frac{|A\,p_1+B\,p_2+\;C\,p_3+D\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{|3.2+2.(-1)+3.3+5|}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}}=\frac{|6-2+9+5\,|}{\sqrt{9+4+9}}=\frac{18}{\sqrt{22}}$$

27 *Hallar la distancia del punto $(0,-5,2)$ al plano $(x,y,z)=(2,0,3)+\alpha(-4,9,-2)+\beta(5,-3,8)$.*

SOLUCION

Según lo expuesto en la página 171

$\mathbf{p}-\mathbf{a}=\;(0,-5,2)-(2,0,3)=(-2,-5,-1)$

$\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=(-4,9,-2)\quad(5,-3,8)=(66,22,-33)=11.\,(6,2,-3)$

$\|\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\|=\|\,11.\,(6,2,-3)=\;=11.\sqrt{36+4+9}=11\sqrt{49}=11\,.\,7=77$

$$d=\frac{|\;\det\,(\mathbf{p}-\mathbf{a}\,,\mathbf{u},\mathbf{v}\,)\,|}{\|\;\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}\;\|}=\frac{209}{77}=\frac{19}{7}$$

ya que
$$\begin{vmatrix}-2 & -4 & 5\\ -5 & 9 & -3\\ -1 & -2 & 8\end{vmatrix}\;=\;-209$$

28 *Hallar la distancia entre los planos paralelos:*

$2x+5y-z+5=0$ y $2x+5y-z+9=0$

SOLUCION

Tomamos un punto del primer plano, por ejemplo el correspondiente a los valores $x=y=0$ que será $(0,0,5)$ y hallamos su distancia al segundo que por sus coeficientes es efectivamente paralelo al primero.

$$d=\frac{|2\,.\,0+5\,.\,0-5+9\,|}{\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{30}}$$

29 *Calcular la distancia del punto $(-2,1,3)$ a la recta* $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+6}{3}=\dfrac{z}{-2}$

SOLUCION

$\mathbf{p} = (-2,1,3) \qquad \mathbf{a} = (1,-2,0) \qquad \mathbf{v} = (2,3,-2)$

$\mathbf{p} - \mathbf{a} = (-3,3,3)$

$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{v} = (-3,3,3) \wedge (2,3,-2) = (-15,0,-15) = 15 \,.\, (-1,0,-1)$

$\| (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{v} \| = \| 15 \,.\, (-1,0,-1) \| = 15\sqrt{1+1} = 15 \,.\, \sqrt{2}$

$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$

$$d = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$$

30 *Calcular la distancia entre las rectas paralelas*

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{-2} \qquad\qquad \frac{x-4}{3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z}{-2}$$

SOLUCION

Como efectivamente son paralelas, según se desprende de sus vectores directores, tomamos un punto de la primera, por ejemplo (2,–1,–3) y hallaremos su distancia a la segunda.

$\mathbf{p} = (2,-1,-3) \quad \mathbf{a} = (4,-6,0) \quad \mathbf{p} - \mathbf{a} = (-2,5,-3) \quad \mathbf{v} = (3,4,-2) \quad \| \mathbf{v} \| = \sqrt{29}$

$(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{v} = (2, -13, -23) \qquad \| (\mathbf{p} - \mathbf{a}) \wedge \mathbf{v} \| = \sqrt{702}$

$$d = \frac{\sqrt{702}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{702}{29}}$$

31 *Calcular la distancia entre las rectas que se cruzan*

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2} \qquad\qquad \frac{x+2}{-5} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+5}{-3}$$

SOLUCION

De acuerdo con lo expuesto en el número 28 se tendrá:

Las dos rectas pueden escribirse

$\mathbf{x} = (1,-2,1) + \lambda \,.\, (2,3,2)$

$\mathbf{x} = (-2,2,-5) + \mu \,.\, (-5,4,-3)$

por lo que

$\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2,2,-5) - (1,-2,1) = (-3,4,-6)$

$\mathbf{v} = (2,3,2) \qquad \mathbf{w} = (-5,4,-3) \qquad \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (-17,-4,23)$

$\det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -103 \qquad \| \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \| = \sqrt{17^2 + 4^2 + 23^2} = \sqrt{834}$

$$d = \frac{|\det(\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|}{\| \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \|} = \frac{103}{\sqrt{834}}$$

32 *Hallar la distancia de la recta* $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{2}$ *al plano* $2x - y - z + 6 = 0$.

SOLUCION

Puesto que el vector director de la recta, (3,4,2) y el vector director asociado al plano (2,–1,–1) son ortogonales:

$$(3,4,2) \,.\, (2,-1,-1) = 6 - 4 - 2 = 0$$

la recta es paralela al plano.

Para hallar la distancia de la recta al plano bastará hallar la de un punto de la recta, por ejemplo el $(2,1,-1)$, al plano.

$$d = \frac{|2.2 - 1.1 - 1.(-1) + 6\ |}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

33 *Dados $A = (3,1,-2)$ $B = (4,0,-4)$ $C = (4,-3,3)$ y $D = (6,-2,2)$, hallar el ángulo que forman las rectas AB y CD.*

SOLUCION

$$\vec{AB} = (4-3, 0-1, -4+2) = (1,-1,-2)$$
$$\vec{CD} = (6-4, -2+3, 2-3) = (2,\ 1,-1)$$

El ángulo que forman las rectas AB y CD es el de sus vectores directores, cuyo coseno viene dado por:

$$\cos\ \omega = \frac{\vec{AB}\ .\ \vec{CD}}{\|\vec{AB}\|.\|\vec{CD}\|} = \frac{(1,-1,-2)\ .\ (2,1,-1)}{\sqrt{1+1+4}\quad \sqrt{4+1+1}} = \frac{2-1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

y por tanto $\omega = 60^\circ$ ó $\dfrac{\pi}{3}$ radianes.

34 *Hallar el ángulo formado por la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ y el plano $2x + 7y - 6z + 1 = 0$.*

SOLUCION

Siendo el vector director de la recta $(3,1,4)$ y el vector director asociado al plano $(2,7,-6)$ el ángulo ϑ será aquel tal que

$$\text{sen}\ \vartheta = \frac{(3,1,4)\ .\ (2,7,-6)}{\|(3,1,4)\|\ .\ \|(2,7,-6)\|} = \frac{|6+7-24\ |}{\sqrt{9+1+16}\ .\sqrt{4v+49+36}} = \frac{11}{\sqrt{2314}}$$

$$\vartheta = \text{arc sen}\frac{11}{\sqrt{2314}} \cong 13^\circ\ 13' \quad \text{ó} \quad 0'23 \text{ radianes}$$

35 *Hallar el ángulo que forman los planos $2x - y + z - 7 = 0$ y $x + y + 2z - 11 = 0$.*

SOLUCION

Vectores directores asociados: $(2,-1,1)$ y $(1,1,2)$

$$\cos\vartheta = \left|\frac{(2,-1,1)\ .\ (1,1,2)}{\sqrt{4+1+1}\ .\sqrt{1+1+4}}\right| = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 60^\circ$$

36 *Escribir las ecuaciones de los planos del ejercicio anterior en su forma normal.*

SOLUCION

La ecuación normal del plano $2x - y + z - 7 = 0$ será:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z - \frac{7}{\sqrt{6}} = 0$$

y la del plano $x + y + 2z - 11 = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y + \frac{2}{\sqrt{6}}z - \frac{11}{\sqrt{6}} = 0$$

37 *Calcular el área del triángulo de vértices (2,–5,3),(4,0,–2) y (3,3,7).*

SOLUCION

$$S = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \| = \frac{1}{2} \| (2,5,-5) \wedge (1,8,4) \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| (60,-13,11) \| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3890}$$

38 *Calcular el área del cuadrilátero de vértices (1,0,3) (–2,5,4) (0,2,5) y (–1,4,7) comprobando previamente si son coplanarios.*

SOLUCION

Denominando a los cuatro puntos A, B, C y D, la ecuación del plano ABC sería:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & x \\ 0 & 5 & 2 & y \\ 3 & 4 & 5 & z \end{vmatrix} = 0$$

por lo que serán coplanarios si D satisface esta ecuación es decir, si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

y efectivamente es así pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 10 & 5 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Para determinar el área del cuadrilátero, en general, bastará con descomponerlo en triángulos. Consideremos primero el triángulo ABC.

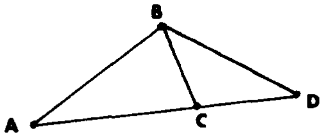
$$S = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \| = \frac{1}{2} \| (-3,5,1) \wedge (-1,2,2) \| = \frac{1}{2} \| (8,5,-1) \| =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{64+25+1} = \frac{1}{2} \sqrt{90} = \frac{3}{2} \sqrt{10}$$

Consideremos a continuación el triángulo ACD.

$$S = \frac{1}{2} \| \vec{AC} \wedge \vec{AD} \| = \frac{1}{2} \| (-1,2,2) \wedge (-2,4,4) \|$$

Aquí observamos que $\vec{AD}$ es combinación lineal de $\vec{AC}$, es decir, la figura de los cuatro puntos sería



en realidad un triángulo. Esto nos indica que previamente debíamos haber averiguado la posición relativa de los puntos. En nuestro caso no existe en realidad cuadrilátero sino triángulo ABD cuya superficie sería:

$$S = \frac{1}{2} \| AB \wedge AD \| = \frac{1}{2} \| (-3,5,1) \wedge (-2,4,4) \| =$$

$$= \frac{1}{2} \| (16,10,-2) \| = 3\sqrt{10}$$

39 *Calcular el volumen del tetraedro de vértices (1,1,1),(2,−1,3),(5,4,−2) y (3,−7,5).*

SOLUCION

$$V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -7 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{6}(-44) \right| = \frac{22}{3}$$

CAPITULO VII

Movimientos y semejanzas en el espacio euclideo tridimensional

1 *En la traslación de vector* **a** *= (2,–5,3), hallar los transformados de los siguientes puntos:* $P = (1,0,3)$, $Q = (2,-5,4)$, $R = (-6,\frac{1}{2},\frac{1}{3})$.

SOLUCION

$p' = p + a$	$q' = q + a$	$r' = r + a$
$p'_1 = 1 + 2 = \ 3$	$q'_1 = 2 + 2 = \ 4$	$r'_1 = -6 + 2 = \ 4$
$p'_2 = 0 - 5 = -5$	$q'_2 = -5-5 = -10$	$r'_2 = \frac{1}{2} - 5 = -\frac{9}{2}$
$p'_3 = 3 + 3 = \ 6$	$q'_3 = 4 + 3 = \ 7$	$r'_3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$
$P' = (3,-5,6)$	$Q' = (4,-10,7)$	$R' = (4, -\frac{9}{2}, \frac{10}{3})$

2 *Hallar la imagen de la recta* $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+1}{-5}$ *en la traslación de vector* **a** *= (–1,0,5)*

SOLUCION

Es la recta paralela a la dada que pasa por el punto imagen de $P = (1,-2,-1)$ en la traslación de vector $a = (-1,0,5)$.

El punto imagen de P, P', es:

$$P' = (1-1, -2+0, -1+5) = (0,-2,4)$$

por lo que la ecuación de la recta pedida es

$$\frac{x}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{-5}$$

3 *Escribir las ecuaciones de la traslación por la que el plano* $2x - y + z + 5 = 0$ *se transforma en el plano* $4x - 2y + 2z + 3 = 0$.

SOLUCION

Expresando las ecuaciones de los dos planos en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -5 - 2\alpha + \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\frac{3}{2} - 2\alpha + \beta \end{cases}$$

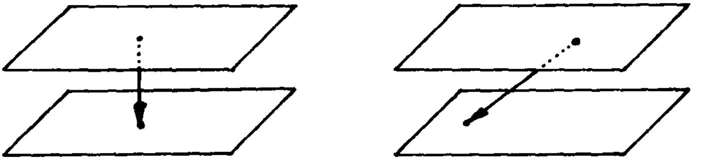
la traslación será aquella de vector a tal que el punto (0,0,5) se transforme en el (0,0,–3), es decir:

$$a = (0,0,-\frac{3}{2}) - (0,0,-5) = (0,0,\frac{7}{2})$$

y las ecuaciones de la traslación en este caso serían

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \frac{7}{2} \end{cases}$$

Observemos que las soluciones pueden ser muchas ya que las ecuaciones de los planos en paramétricas pueden escribirse a partir de uno cualquiera de sus puntos. En realidad, pues, cualquier vector que una a un punto de un plano con un punto del otro, definirá una traslación que transformará el primer plano en el segundo.



4 *¿Qué traslación transforma la esfera $x2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 8z - 7 = 0$ en una esfera con centro en el origen? Escribir la ecuación de la esfera imagen.*

SOLUCION

Si de la ecuación de la esfera

$$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)2 = R^2$$

pasamos por desarrollo a la forma general

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

de forma análoga a como se hace con la circunferencia en el plano, obtenemos las relaciones:

$$\begin{cases} -2c_1 = A \\ -2c_2 = B \\ -2c_3 = C \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - R^2 = D \end{cases} \quad \text{que en nuestro caso nos dan:} \quad \begin{cases} -2c_1 = 4 \\ -2c_2 = -6 \\ -2c_3 = 8 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - R^2 = -7 \end{cases}$$

de donde se obtiene $C = (-2,3,-4)$ $R = 6$

La traslación pedida será aquella que transforma el punto $(-2,3,-4)$ en el $(0,0,0)$,es decir, la de vector

$$a = (0,0,0) - (-2,3,-4) = (2,-3,4)$$

que tendrá por ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \\ z' = z + 4 \end{cases}$$

y la esfera imagen tendrá por ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36$$

ya que su centro es $(0,0,0)$ y su radio es 6.

5 *Escribir las ecuaciones de la simetría central con centro en $P = (4,3,-7)$ y hallar la imagen del origen por dicha simetría.*

SOLUCION

$$x' = -x + 2p \qquad p = (4,3,-7)$$

$$\begin{cases} x' = -x + 8 \\ y' = -y + 6 \\ z' = -z - 14 \end{cases}$$

Aplicando a $(0,0,0)$ resulta como imagen el punto $(8,6,-14)$.

6 *Observando que el centro de simetría es el punto medio entre un punto y su imagen, por medio de las ecuaciones de la simetría deducir las fórmulas del punto medio de un segmen-*

to AB, $A = (a_1,a_2,a_3)$ $B = (b_1,b_2,b_3)$

SOLUCION

Denominando $M = (m_1, m_2, m_3)$ al punto medio del segmento AB

B sería la imagen de A en la simetría central con centro en M por lo que deberían satisfacerse las ecuaciones

$$\begin{cases} b_1 = -a_1 + 2m_1 \\ b_2 = -a_2 + 2m_2 \\ b_3 = -a_3 + 2m_3 \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \\ m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2} \\ m_3 = \dfrac{a_3 + b_3}{2} \end{cases}$$

expresión de las coordenadas del punto medio de un segmento en función de las de los extremos.

7 *Hallar la imagen de la recta* $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{2}$ *en la simetría central con respecto al origen.*

SOLUCION

Es la recta paralela a la dada que pasa por un punto simétrico de un punto de la recta dad, por ejemplo, el (–2,1,–3). Su simétrico respecto al origen será:

$$\begin{cases} x' = 2 - 2.0 \\ y' = -1 - 2.0 \\ z' = -3 - 2.0 \end{cases}$$

el (2,–1,3), y, en consecuencia, la ecuación de la recta imagen es:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$$

8 *Hallar el centro de simetría por el cual el plano de ecuación* $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ *se transforma en su paralelo por el origen.*

SOLUCION

El plano dado en paramétricas puede escribirse

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{4}\alpha + \dfrac{3}{4}\beta \end{cases}$$

con lo que basta tomar el centro de simetría tal que el punto $(0,0,\frac{5}{4})$ se transforme en el (0,0,0), y que sería

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+5/4}{2}\right) = (0, 0, \frac{5}{8})$$

Obsérvese que como el punto definidor del plano puede ser otro que el (0,0,5) caben muchas soluciones distintas. Por ejemplo, siendo el punto (2,1,1) también del plano dado éste podría escribirse:

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \beta \\ z = 1 - \frac{2}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta \end{cases} \Rightarrow \text{centro de simetría} \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

9 *Hallar la ecuación de la esfera simétrica de la $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 6z + 4 = 0$ en la simetría de centro $P = (1,-4,2)$.*

SOLUCION

Centro y radio de la esfera dada: $C = (4,-2,-3)$ $R = 5$

Simétrico de (4,–2,–3) respecto a (1,–4,2)

$$\begin{cases} x' = -4 + 2 \,.\, 1 = -2 \\ y' = 2 + 2.(-4) = -6 \\ z' = 3 + 2 \,.\, 2 = 7 \end{cases} \qquad (-2,-6,7)$$

Esfera imagen, con centro en el simétrico del centro y mismo radio

$(x+2)^2 + (y+6)^2 + (z-7)^2 = 25$

o bien

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6y - 14z + 64 = 0$

10 *Hallar la ecuación de la recta simétrica de la de ecuación $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{6}$ en la simetría respecto al plano XY.*

SOLUCION

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+5}{-6}$$

11 *En la simetría respecto al plano XY, un plano corta al XY en la recta $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y pasa por el punto $P = (3,5,4)$. Hallar la ecuación de su simétrico.*

SOLUCION

La intersección con el plano de simetría será doble en la simetría, por lo que el plano solicitado será el que pase por el punto P' = (3,5,–4), simétrico del P respecto al plano XY, y cuya intersección con el plano XY sea la recta dada.

Para determinar su ecuación buscamos dos puntos de esta recta, por ejemplo:

(0,0,0) y (3,–2,0)

y la ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 3 & 3 \\ y-0 & -2 & 5 \\ z-0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o bien} \quad 8x + 12y + 21z = 0$$

12 *Hallar el simétrico del punto $P = (4,3,-6)$ respecto al plano $2x + y - 3z + 7 = 0$.*

SOLUCION

Determinaremos en primer lugar M proyección ortogonal de P sobre el plano.

Recta perpendicular por P al plano dado:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+6}{-3}$$

Intersección de esta recta con el plano:

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+6}{-3}\\[2mm] 2x+y-3z=-7\end{cases}\qquad\begin{cases}x-4=2y-6\\ -3x+9=\ z+6\\ 2x+y-3z+7=0\end{cases}$$

$$x=-\frac{8}{7}\ ,\ y=\frac{3}{7}\ ,\ z=\frac{12}{7}\qquad \text{es decir,}\qquad M=\left(-\frac{8}{7},\frac{3}{7},\frac{12}{7}\right)$$

Con la proyección ortogonal ya podemos escribir las ecuaciones de la simetría respecto al plano

$$x' = -x+2m$$

$$\begin{cases}x' = -x-\dfrac{16}{7}\\[2mm] y' = -y+\dfrac{6}{7}\\[2mm] z' = -z+\dfrac{24}{7}\end{cases}$$

y, en particular, las de P' simétrico de P serán: $\left(-\dfrac{44}{7},-\dfrac{15}{7},\dfrac{66}{7}\right)$

13 *Hallar la ecuación de la simétrica de la esfera de centro en (4,–2,–5) y radio 2 respecto a plano* $x+y+z-2=0$.

SOLUCION

Será la esfera del mismo radio con centro en el simétrico del centro.

Determinemos esta.

Recta perpendicular por (4,–2,–5) al plano $x+y+z-2=0$

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+5}{1}$$

Intersección de esta recta con el plano : $x=\dfrac{17}{3}\ ,\ y=-\dfrac{1}{3}\ ,\ z=-\dfrac{10}{3}$

Simétrico del punto (4,–2,–5) : $\left(\dfrac{22}{3},\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{5}{3}\right)$

Ecuación de la circunferencia:

$$\left(x-\frac{22}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2+\left(z+\frac{5}{3}\right)^2=4$$

o bien

$$x^2+y^2+z^2-\frac{44}{3}x-\frac{8}{3}y+\frac{10}{3}z+\frac{163}{3}=0$$

14 *Determinar la posición relativa de la recta* $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{5}$ *y su simétrica respecto*

al eje Z.

SOLUCION

Simétrica de la recta dada respecto al eje Z.

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{5}$$

Ecuaciones de las dos rectas en forma cartesina:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{5}\ \begin{cases}3x-2y=-5\\5x-2z=-3\end{cases};\ \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{5};\begin{cases}-3x+2y=-5\\5x+2z=\ \ 3\end{cases}$$

Posición relativa de las dos rectas

$$M=\begin{pmatrix}3&-2&0\\5&0&-2\\-3&2&0\\5&0&2\end{pmatrix}\qquad M'=\begin{pmatrix}3&-2&0&-5\\5&0&-2&-3\\-3&2&0&-5\\5&0&2&3\end{pmatrix}$$

como $\text{rang}\,M=3$ y $\text{rang}\,M'=4$ las rectas se cruzan.

15 *En la simetría respecto al eje z, ¿hay alguna recta que pase por el punto (2,–3,6) cuya imagen sea ella misma? Es decir, ¿hay alguna recta doble que pase por (2,–3,6)? Escribir su ecuación caso de que exista.*

SOLUCION

En una simetría axial, como para determinar el simétrico de un punto usamos la proyección ortogonal del mismo, las rectas que unen un punto con su proyección ortogonal sobre el eje son dobles ya que en dicha recta junto con cada punto se halla su simétrico.

En nuestro caso como la proyección ortogonal de (2,–3,6) sobre el eje z es el punto (0,0,6) la recta que une estos dos puntos será doble, y su ecuación es:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-6}{0}$$

Además es la única recta doble que pasa por (2,–3,6) ya que cualquier recta doble pasando por (2,–3,6) tiene que pasar por este punto y su simétrico (–2,3,6), y hay una sola recta que pase por dos puntos determinados.

16 *Hallar la ecuación del plano simétrico del $2x-y+3z-8=0$ respecto a la recta*

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{1}$$

SOLUCION

Primero determinamos la expresión del simétrico de un punto cualquiera P = (a,b,c) respecto de la recta dada. Para ello:

Plano por el punto (a,b,c) perpendicular a la recta

$$3(x-a)+2(y-b)+1(z-c)=0$$
$$3x+2y+z=3z+2b+c$$

Intersección de este plano con la recta dada que se obtiene del sistema:

$$\begin{cases}3x+2y+\ \ z=\ 3a+2b+c\\x\qquad\ \ -3z=-8\\\qquad y-2z=-4\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{9a+6b+3c-16}{14} \\ y=\dfrac{6a+4b+2c+8}{14} \\ z=\dfrac{3a+2b+c+32}{14} \end{array}\right.$$ Proyección ortogonal de (a,b,c) sobre la recta.

Ecuación de la simetría:

$$x' = -x + 2p$$

siendo **p** la proyección ortogonal, de donde, llamando (a',b',c') al simétrico de (a,b,c) será

$$\left\{\begin{array}{l} a'=-a+2\,.\,\dfrac{9a+6b+3c-16}{14}=\dfrac{4a+12b+6c-32}{14} \\ b'=-b+2.\dfrac{6a+4b+2c+\ 8}{14}=\dfrac{12a-6b+4c+16}{14} \\ c'=-c\ +2.\dfrac{3a+2b+\ c+32}{14}=\dfrac{6a+4b-12c+64}{14} \end{array}\right.$$

De donde se pueden expresar también a,b,c en función de a',b',c', resolviendo el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 4a+12b+6c\ =14a'+32 \\ 12a-\ 6b+\ 4c=14b'-\ 16 \\ 6a+\ 4b-12c=14c'-\ 64 \end{array}\right.$$

cuyo resultado es

$$\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{2a'+6b'+3c'-16}{7} \\ b=\dfrac{6a'-3b'+2c'+8}{7} \\ c=\dfrac{3a'+2b'-6c'+32}{7} \end{array}\right.$$

Siendo estas las relaciones que ligan las coordenadas de un punto con su simétrico, las de un punto del plano (x,y,z) que verifican la relación

$$2x-y+3z-8=0$$

se transformarán en (x',y',z') y verificarán

$$2.\frac{2x'+6y'+3z'-16}{7}-\frac{6x'-3y'+2z'+8}{7}+3:\frac{3x'+2y'-6z'+32}{7}-8=0$$

de donde

$$x'+3y'-2z'=0$$

es decir, la ecuación del plano simétrico será: $x+3y-2z=0$

17 ***Determinar la ecuación de una recta tal que en la simetría respecto a ella sean simétricas las esferas:***

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$$
$$(x+3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=16$$

SOLUCION

Será cualquier recta que pase por el punto medio de los dos centros de las esferas y sea perpendicular a la recta que une estos dos centros. Con ello se conseguirá que los centros sean simétricos, y como las distancias se conservan, con ello bastará.

Centros (1,–2,3) (–3,4,5)

Punto medio $\left(\dfrac{-3+1}{2}, \dfrac{-2+4}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right) = \quad (-1,1,4)$

Dirección de la recta que une los centros

$$\mathbf{v} = (-3-1,\ 4-(-2),\ 5-3) = (-4,6,2) = 2\ .\ (-2,3,1)$$

Luego servirá como eje de simetría cualquier recta de ecuación

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-4}{c}$$

con tal que $-2a + 3b + c = 0$

ya que pasa por (–1,–1,4) y la segunda condición expresa la perpendicularidad con la línea de los centros.

18 *Hallar la imagen del punto P = (1,1,1) en el giro de eje Z y amplitud 45°.*

SOLUCION

Ecuaciones del giro de eje Z y amplitud 45°

$$\left\{\begin{array}{l} x' = x\cos 45^\circ - y \operatorname{sen} 45^\circ \\ y' = x \operatorname{sen} 45^\circ + y \cos 45^\circ \\ z' = z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ z' = 1 \end{array}\right.$$

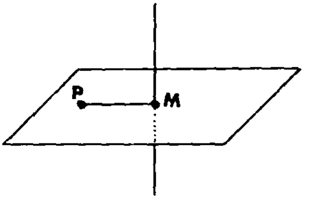
Siendo pues la imagen del punto (1,1,1) el punto $(0,\sqrt{2}, 1)$.

19 *Hallar la imagen del punto P = (2,–3,4) en el giro de eje* $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{3}$ *y amplitud 60°.*

SOLUCION

Vamos a determinar en primer lugar la proyección ortogonal M del punto P = (2,–3, 4) sobre el eje de giro.

Eje: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{3}$



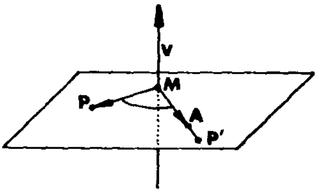
Plano por P perpendicular al eje:

$$4(x-2) + 2(y+3) + 3(z-4) = 0$$
$$4x + 2y + 3z = 14$$

Intersección, M, de este plano con el eje

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - 6 = 4y - 4 \\ 3x - 9 = 4z - 20 \end{array}\right. \Rightarrow \quad x = \frac{27}{29} \quad y = -\frac{1}{29} \quad z = \frac{100}{29}$$

$$M = \left(\frac{27}{29} , - \frac{1}{29} , \frac{100}{29} \right)$$



Determinemos un vector $\overrightarrow{MA}$ en la dirección $\overrightarrow{MP}$' (P' imagen de P).

$\overrightarrow{MA}$ será ortogonal a $\overrightarrow{MP}$ y al vector dirección **v** del eje.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MP} \wedge \mathbf{v} = \left(2 - \frac{27}{29} , -3 + \frac{1}{29} , 4 - \frac{100}{29} \right) \wedge (4,2,3) =$$

$$= \frac{1}{29} (31, -86, 16) \wedge (4,2,3) = (-10,-1,14)$$

El punto P' (x,y,z) será tal que

$$\| \overrightarrow{MP'} \| = \| \overrightarrow{MP} \|$$

pero $\overrightarrow{MP'} = \lambda . \overrightarrow{MA}$

$$\| \overrightarrow{MP'} \| = \lambda \ \| \overrightarrow{MA} \|$$

y así

$$\lambda \ \| \overrightarrow{MA} \| = \| \overrightarrow{MP} \| \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{\| \overrightarrow{MP} \|}{\| \overrightarrow{MA} \|} = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

y como $\overrightarrow{MP'} = \lambda . \overrightarrow{MA}$

$$\left(x - \frac{27}{29} , y + \frac{1}{29} , z - \frac{100}{29} \right) = \frac{1}{\sqrt{29}} (-10,-1,14) \qquad \text{o sea}$$

$$P' \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{27 - 10\sqrt{29}}{29} \\ y &= \frac{-1 - \sqrt{29}}{29} \\ z &= \frac{100 + 14\sqrt{29}}{29} \end{aligned} \right.$$

20 *Hallar la ecuación del plano imagen del $x + y - z + 2 = 0$ en el giro de eje Z y amplitud 60°*

SOLUCION

Escribiendo la ecuación del plano en paramétricas, por ejemplo

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \beta \\ z &= 2 + \alpha + \beta \end{aligned} \right.$$

y aplicando la expresión de la página 209 tenemos como ecuaciones del plano imagen

$$\left\{ \begin{aligned} x &= (0.\frac{1}{2} - 0.\frac{\sqrt{3}}{2}) + \alpha (1.\frac{1}{2} - 0 . \frac{\sqrt{3}}{2}) + \beta (0.\frac{1}{2} - 1.\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ y &= (0.\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.\frac{1}{2}) + \alpha (1.\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.\frac{1}{2}) + \beta (0.\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 . \frac{1}{2}) \\ z &= 2 + \alpha + \beta \end{aligned} \right.$$

esto es:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\beta \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \dfrac{1}{2}\beta \\ z = 2 + \alpha + \beta \end{array}\right.$$

que puede escribirse también en forma cartesiana.

$$\begin{vmatrix} x & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ z-2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (\sqrt{3}-1)\,x - (\sqrt{3}+1)\,y + 2z - 4 = 0$$

21 ***Determinar la amplitud del giro de eje z que transforma la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 3 = 0$.***

SOLUCION

Centro y radio de la primera esfera

$c_1 = \dfrac{-2}{-2} = 1$, $c_2 = \dfrac{-2}{-2} = 1$, $c_3 = 0$

$R^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - D = 1+1+2$, $R = 2$

Centro y radio de la segunda esfera

$c_1 = \dfrac{2}{-2}$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

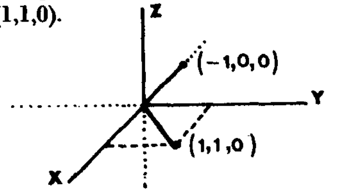
$R^2 = 1 + 3$, $R = 2$

Las dos esferas tienen el mismo radio. El giro que transforma una en otra será aquel que transforme los centros respectivos (1,1,0) en (–1,0,0), es decir, a través de las ecuaciones del giro de eje z, aquel tal que

$$\begin{array}{l} -1 = 1 \,.\, \cos\alpha - 1 \,.\, \operatorname{sen}\alpha \\ \;\;0 = 1 \,.\, \operatorname{sen}\alpha + 1 \,.\, \cos\alpha \\ \;\;0 = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\ , \quad \cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

solución **imposible** ya que no hay ningún ángulo que verifique estas condiciones.

Esta situación responde al hecho de quenunca el punto (–1,0,0) puede ser imagen del (1,1,0) en el giro de eje z ya que la distancia de cada uno de los puntos al eje es distinta 1 en el (–1,0,0) y $\sqrt{2}$ en el (1,1,0).



22 ***El plano $x + 2y - z + 1 = 0$ se transforma por la traslación producto $T_b \circ T_a$, en el $2x + 4y - 2z + 3 = 0$. Sabiendo que $b = (4,-3,2)$, hallar a.***

SOLUCION

Planos en paramétricas.

$$x + 2y - z + 1 = 0 \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 + \alpha + 2\beta \end{array}\right.$$

$$2x + 4y - 2z + 3 = 0 \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \dfrac{3}{2} + \alpha + 2\beta \end{array}\right.$$

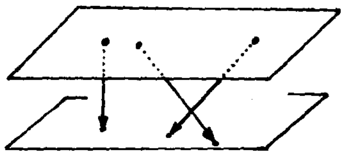
La traslación producto $T_b \circ T_a = T_{a+b}$ transforma $(0,0,1)$ en $(0,0,\frac{3}{2})$ de donde:

$$a + b = (0,0,\frac{3}{2}) - (0,0,1) = (0,0,\frac{1}{2})$$

como $b = (4,-3,2)$

$$a = (0,0,\frac{1}{2}) - (4,-3,2) = (-4,3,-\frac{3}{2})$$

Obsérvese que como los puntos usados para definir el plano en paramétricas pueden ser varios, pueden ser también varias las soluciones del problema, lo cual podía ya preverse puesto que dados dos planos paralelos existen infinidad de traslaciones que transforman uno en otro, todas las definidas por vectores que unan un punto de un plano con un punto del otro.



23 *Escribir las ecuaciones de la traslación producto* $T_b \circ T_a$ *siendo* $a = (3,-5,\frac{1}{2})$ $b = (-\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{4})$ *y hallar la imagen por la traslación resultante de la recta:*

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 4 = 0 \\ 4x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUCION

La traslación producto es la correspondiente al vector

$$a + b = (3 - \frac{1}{3}, -5 + 2, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = (\frac{8}{3}, -3, \frac{3}{4})$$

por lo que sus ecuaciones serán:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{8}{3} \\ y' = y - 3 \\ z' = z + \frac{3}{4} \end{cases}$$

La recta dada puede escribirse en forma continua como $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-3}{11}$ y como la imagen de $(1,1,3)$ por la traslación producto es

$$\begin{cases} x' = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3} \\ y' = 1 - 3 = -2 \\ z' = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4} \end{cases}$$

la ecuación de la recta transformada será: $\frac{x - \frac{11}{3}}{3} = \frac{y+2}{10} = \frac{z - \frac{15}{4}}{11}$

24 *Dado el plano $x - 3y + z + 4 = 0$ aplicarle el producto de simetrías centrales $S(P)$ y $S(Q)$, siendo $P = (2,-1,3)$ y $Q = (3,4,-5)$. ¿Da el mismo resultado $S(P)\circ S(Q)$ que $S(Q)\circ S(P)$?*

SOLUCION

De acuerdo con la proposición 10.1 el producto de las simetrías centrales S(P) y S(Q) es una traslación de vector $2\,\overrightarrow{PQ}$.

$PQ = (3 - 2, 4 + 1 , -5 - 3) = (1,5,-8) \Rightarrow 2.\,PQ = (2,10,-16)$

Ecuaciones de la traslación

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 10 \\ z' = z - 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 10 \\ z = z' + 16 \end{cases}$$

Plano transformado

$$(x' - 2) - 3\,(y' - 10) + (z' + 16) + 4 = 0$$

es decir, el plano de ecuación

$$x - 3y + z + 48 = 0$$

No da el mismo resultado $S(P)\circ S(Q)$ pues en este caso la traslación es de vector $2.\overrightarrow{QP} = (-2,-10,16)$, y el plano transformado

$$(x' + 2) - 3(y' + 10) + (z' - 16) + 4 = 0$$

o sea

$$x - 3y + z - 40 = 0$$

25 *Dadas las rectas* $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$; $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+5}{3}$ *dar las ecuaciones de dos planos tales que al aplicar el producto de las simetrías respecto a ellos la primera recta se transforme en la segunda.*

SOLUCION

Las rectas son paralelas y pueden considerarse imagen una de otra por una traslación, por ejemplo, la que transforma el punto $(1,-2,1)$, definidor de la primera recta, en el $(-3,2,-5)$, definidor de la segunda. Esta traslación sería $T_{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{a} = (-4,4,-6)$.

De acuerdo con la proposición 11.2 esta traslación puede descomponerse en producto de dos simetrías respecto a planos paralelos, α y β.

Como α podemos tomar

$$-4x + 4y - 6z = 0$$

equivalente a

$$2x - 2y + 3z = 0$$

y como β el trasladado de α por $T_{\mathbf{a}/2}$ con $\dfrac{\mathbf{a}}{2} = (-2,2,-3)$

Ecuaciones de $T_{\mathbf{a}/2}$

$$\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y =+2 \\ z' = z - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' - 2 \\ z = z' + 3 \end{cases}$$

Plano transformado de α por esta traslación

$$2(x' + 2) - 2(y' - 2) + 3(z' + 3) = 0$$

$$2x' - 2y' + 3z' + 17 = 0$$

es decir, plano β :

$$2x - 2y + 3z + 17 = 0$$

Obsérvese la multiplicidad de soluciones posibles ya que pueden, primero, ser distintas las traslaciones que se tomen de manera que una recta se transforme en la otra y,según - do, la elección de α dentro de los de vector director asociado $(-4,4,-6)$ también es libre.

26 ***Comprobar que si al punto P (4,2,5) se le aplican sucesivamente las simetrías respecto a los planos $3x + 2y = 0$ y $5x - 3y = 0$ se obtiene el mismo resultado que si se le aplica directamente un giro de eje la recta intersección de los dos planos y amplitud el doble del ángulo que forman dichos planos.***

SOLUCION

1 Simétrico de P (4,2,5) respecto a $3x + 2y = 0$

Perpendicular por (4,2,5) al plano $3x + 2y = 0$

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{0}$$

Intersección de dicha perpendicular con el plano

$$\left(\frac{4}{13}, \frac{6}{13}, 5 \right)$$

Este es el punto medio entre P y su simétrico P', luego:

$$P' = \left(-\frac{44}{13}, -\frac{38}{13}, 5 \right)$$

2 Simétrico de P' respecto al plano $5x - 3y = 0$

Perpendicular por P' a $5x - 3y = 0$

$$\frac{x + \frac{44}{13}}{5} = \frac{y + \frac{38}{13}}{-3} = \frac{z-5}{0}$$

Intersección de dicha perpendicular con el plano

$$\left(-\frac{483}{221}, -\frac{805}{221}, 5 \right)$$

Este es el punto medio entre P' y su simétrico P", luego

$$P'' = \left(-\frac{218}{221}, -\frac{964}{221}, 5 \right)$$

Y P" es el punto imagen final por la aplicación de las dos simetrías.

3 Recta intersección de los dos planos del eje de giro.

Es la recta de vector director (0,0,1) y que pasa por (0,0,0), es decir, es el eje z.

4 Angulo que forman los dos planos.

$$\cos\alpha = \frac{3.5 - 2.3}{\sqrt{13}\sqrt{34}} = \frac{9}{\sqrt{442}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{81}{442}} = \pm\frac{19}{\sqrt{442}}$$

El doble signo corresponde a la doble posibilidad en el sentido del giro.

5 Ecuaciones del giro de eje z y ángulo 2α

$$\begin{cases} x' = x \cos 2\alpha - y \operatorname{sen} 2\alpha \\ y' = x \operatorname{sen} 2\alpha + y \cos 2\alpha \\ z' = z \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{81}{442} - \frac{361}{442} = -\frac{140}{221}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(\pm \frac{19}{\sqrt{442}} \right) \cdot \frac{9}{\sqrt{442}} = \pm \frac{171}{221}$$

Con lo que las ecuaciones de los dos giros posibles son:

$$\begin{cases} x' = -\frac{140}{221} x - \frac{171}{221} y \\ y' = \frac{171}{221} x - \frac{140}{221} y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -\frac{140}{221} x + \frac{171}{221} y \\ y' = -\frac{171}{221} x - \frac{140}{221} y \\ z' = z \end{cases}$$

correspondientes, en realidad, a los dos productos posibles según el orden en que se tomen las simetrías.

En nuestro caso es el segundo el que coincide, pues

$$-\frac{140}{221} \cdot 4 + \frac{171}{221} \cdot 2 = -\frac{218}{221}$$

$$-\frac{171}{221} \cdot 4 - \frac{140}{221} \cdot 2 = -\frac{964}{221}$$

$$5 = 5$$

27 ***Determinar la traslación equivalente al producto de las simetrías de ejes:***

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{4} \quad ; \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$$

SOLUCION

Plano perpendicular a los dos ejes de simetría.

Entre los posibles tomamos el que pasa por (0,0,0) cuya ecuación es:

$$3x + 2y + 4z = 0$$

Intersección de este plano con el primer eje. Intersección con el segundo eje.

$$P = \left(\frac{44}{29}, \frac{68}{29}, -\frac{67}{29} \right) \qquad Q = \left(-\frac{38}{29}, \frac{23}{29}, \frac{17}{29} \right)$$

La traslación equivalente al producto de las dos simetrías es la de vector:

$$2\,\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{164}{29}, -\frac{90}{29}, \frac{168}{29} \right)$$

28 ***Descomponer el giro alrededor de la recta*** $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{3}$ ***y de amplitud 120° en***

el producto de dos simetrías axiales de manera que el eje de una de ellas pase por el origen..

SOLUCION

Para hallar uno de los ejes de simetría, vamos a determinar primero la intersección P del plano π perpendicular al eje de giro r y que pasa por el origen:

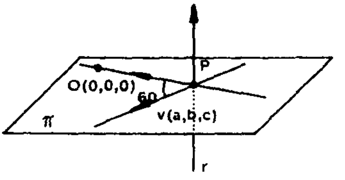
Plano π

$$2x + 4y + 3z = 0$$

Eje r:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{3}$$

$$P = -\frac{113}{29}, -\frac{23}{29}, \frac{106}{29}$$



Uno de los ejes de simetría pedidos es el que une el origen con P, cuya ecuación puede escribirse en la forma

$$\frac{x-0}{-\frac{113}{29}} = \frac{y-0}{-\frac{23}{29}} = \frac{z-0}{\frac{106}{29}} \quad \text{o también} \quad \frac{x}{113} = \frac{y}{23} = \frac{z}{-106}$$

El vector director v = (a,b,c) del otro eje de simetría tiene que ser un vector perpendicular al eje de giro (2,4,3) del y formando un ángulo de 60° con el otro eje (113,23, −106), por ello

$$\begin{cases} 2a + 4b + 3c = 0 \\ 113a + 23b - 106c = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \,.\, \sqrt{113^2+23^2+106^2} \,.\, \cos 60^\circ = \\ \qquad = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \,.\, \sqrt{24.534} \,.\, \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si a este vector, de módulo libre, le imponemos, para facilitar el cálculo que su módulo sea

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{2}{\sqrt{24.534}}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 2a + 4b + 3c = 0 \\ 113a + 23b - 106c = 1 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{2}{\sqrt{24.534}} \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$a = \frac{113+17\sqrt{87}}{24.534} \qquad b = \frac{23-19\sqrt{87}}{24.534} \qquad c = \frac{-106+14\sqrt{87}}{24.534}$$

o

$$a = \frac{113-17\sqrt{87}}{24.534} \qquad b = \frac{23+19\sqrt{87}}{24.534} \qquad c = \frac{-106-14\sqrt{87}}{24.534}$$

dos soluciones correspondientes a los dos posibles sentidos del giro.

Fijándonos en la primera, (para la segunda vale exactamente lo mismo), podemos tomar como vector director del segundo eje de simetría

$$0 = (113 + 17\sqrt{87},\ 23 - 19\sqrt{87}\ ,\ -106 + 14\sqrt{87})$$

y la ecuación de este eje es la de la recta que pasa por P y tiene este vector director, o sea

$$\frac{x + \frac{113}{29}}{113 + 17\sqrt{87}} = \frac{y + \frac{23}{29}}{23 - 19\sqrt{87}} = \frac{z - \frac{106}{29}}{-106 + 14\sqrt{87}}$$

29 ***Escribir las ecuaciones de la homotecia de centro en P = (4,2,–1) y razón k = 2. Hallar las imágenes de los puntos A = (2,–1,3) B = (4,5,2) y C = (1,–3,4). Comparar las superficies del triángulo que forman estos y del que forman sus imágenes.***

SOLUCION

Ecuaciones de la homotecia de centro P = (4,2,–1) y razón k = 2

$$\begin{cases} x' = 2x + (1-2).\,4 = 2x - 4 \\ y' = 2y + (1-2).\,2 = 2y - 2 \\ z' = 2z + (1-2)(-1) = 2z + 1 \end{cases}$$

que nos dan las imágenes de los tres puntos dados:

A' = (0,–4,7)   B' = (4,8,5)   C' = (–2,–8,9)

Area del triángulo ABC

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \wedge \vec{AC} \| = \frac{1}{2} \| (4,-1,2) \| = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Area del triángulo A'B'C'

$$S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \| \vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'} \| = \frac{1}{2} \| (16,-4,8) \| = \frac{4\sqrt{21}}{2}$$

$$S_{A'B'C'} = 4 \,.\, S_{ABC}$$

30 ***Determinar el centro y la razón de una homotecia tal que el segmento AB, A = (1,2,0), B = (0,1,3) se transforme en el A'B', A' = (3,4,–2), B' = $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, 2)$***

SOLUCION

Puesto que A se transforma en A' y B en B', las ecuaciones de esta homotecia de razón k y centro P (x,y,z) verificarán:

$$\begin{cases} 3 = k + (1-k)\,x \\ 4 = 2k + (1-k)\,y \\ -2 = (1-k)\,z \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{3} = (1-k)\,x \\ \frac{8}{3} = k + (1-k)\,y \\ 2 = 3k + (1-k)\,z \end{cases}$$

sistema de 6 ecuaciones con cuatro incógnitas. De las cuatro primeras ecuaciones se deduce

$$k = \frac{4}{3} \qquad x = -5 \qquad y = -4 \qquad z = 6$$

valores que satisfacen las dos restantes, por lo que el sistema es compatible y la solución del problema es:

$$\text{razón } k=\frac{4}{3} \qquad \text{centro } P=(-5,-4,6)$$

31 *Determinar el centro y la razón de una homotecia tal que la esfera*

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=4$$

se transforma en

$$(x+5)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9$$

SOLUCION

Primera esfera: $C(1,-2,5)$ $\quad r=\sqrt{4}=2$

Segunda esfera (transformada): $C'(-5,3,-4)$ $\quad r'=3$

Como la razón de los radios coincide con la razón de homotecia, será: $k=\frac{r'}{r}=\frac{3}{2}$

Como C' es homotético de C en las ecuaciones de la homotecia será:

$$\left.\begin{aligned} -5&=\frac{3}{2}\cdot 1+\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot p_1\\ 3&=\frac{3}{2}\cdot(-2)+\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot p_2\\ -4&=\frac{3}{2}\cdot 5+\left(1-\frac{3}{2}\right)\cdot p_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} p_1&=13\\ p_2&=-12\\ p_3&=23\end{aligned}\right.$$

luego el centro de la homotecia es $P=(13,-12,23)$.

32 *Hallar la ecuación del plano homotético del $2x-3y+z=0$ en la homotecia de centro en $P=(4,-2,1)$ y razón $k=2$.*

SOLUCION

Las ecuaciones de la homotecia son

$$\left\{\begin{aligned} x'&=2x+(1-2)\cdot 4=2x-4\\ y'&=2y+(1-2)(-2)=2y+2\\ z'&=2z+(1-2)\cdot 1=2z-1 \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x&=\frac{x'+4}{2}\\ y&=\frac{y'-2}{2}\\ z&=\frac{z'+1}{2}\end{aligned}\right.$$

con lo que la relación entre las coordenadas de los puntos homotéticos de los del plano será

$$2\,\frac{x'+4}{2}-3\,\frac{y'-2}{2}+\frac{z'+1}{2}=0$$

$$2x'+8-3y'+6+z'+1=0$$

$$2x'-3y'+z'+15=0$$

es decir, la ecuación de un plano. Así el plano homotético es

$$2x-3y+z+15=0$$

También podía haberse considerado que la ecuación del plano homotético es la de un plano paralelo al dado que pasa por un punto homotético de uno de los del plano.

En este caso puede tomarse como punto del primer plano el (0,0,0). Su homotético es (–4,2,–1) y el plano paralelo al dado por dicho punto es:

$$2(x + 4) - 3(y - 2) + (z =+1) = 0$$

$$2x - 3y + z + 15 = 0$$

33 *comprobar que el ángulo que forman los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, siendo A = (1,0,3), B = (3,–2, 4) y C = (4,–5,3) y el que forman sus homotéticos, por la homotecia de centro el origen y razón k = 4, son iguales.*

SOLUCION

$\vec{AB} = (2,-2,1) \qquad \vec{AC} = (3,-5,0)$

Angulo que forman AB y AC .

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\,\|\vec{AC}\|} = \frac{16}{\sqrt{9}\sqrt{34}} = \frac{16}{3\sqrt{34}}$$

Ecuaciones de la homotecia de centro el origen y razón k = 4

$$\begin{cases} x' = 4x \\ y' = 4y \\ z' = 4z \end{cases}$$

Imágenes de A, B y C por esta homotecia

$A' = (4,0,12) \qquad B' = (12,-8,16) \qquad C' = (16,-20,12)$

$\vec{A'B'} = (8,-8,4) \qquad \vec{A'C'} = (12,-20,0)$

Angulo que forman $\vec{A'B'}$ y $\vec{A'C'}$

$$\cos\alpha = \frac{256}{\sqrt{144}\sqrt{544}} = \frac{16}{3\sqrt{34}}$$

Efectivamente coinciden.

34 *Comprobar que al aplicar al punto P = (4,3,–2) sucesivamente las homotecias H(0,2) y H(0,3), donde 0 es el origen, coincide con aplicar directamente la homotecia H(0,6).*

SOLUCION

Ecuaciones de las homotecias H(0,2) y H(0,3)

$$H(0,2)\ \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \\ z' = 2z \end{cases} \qquad H(0,3)\ \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \\ z' = 3z \end{cases}$$

Imágenes sucesivas de P (4,3,–2)

$$P\,(4,3,-2) \xrightarrow{H(0,2)} P'\,(8,6,-4) \xrightarrow{H(0,3)} P''\,(24,18,-12)$$

Ecuación de la homotecia H(0,6)

$$\begin{cases} x' = 6x \\ y' = 6y \\ z' = 6z \end{cases}$$

Imagen de P por H(0,6)

$$P\ (4,3,-2) \xrightarrow{H(0,6)} P'\ (24,18,-12)$$

35 ***Sean las homotecias $H(C,4)$ y $H(O,\frac{1}{4})$ donde $C = (3,-5,2)$ y $O = (0,0,0)$, Escribir directamente las ecuaciones de la traslación equivalente al producto de las dos y comprobar que la imagen del punto $P = (4,5,-2)$ es la misma aplicando directamente dicha traslación o sucesivamente las dos homotecias.***

SOLUCION

Según la proposición 23.1 la ecuación de la traslación equivalente a $H(Q,h) \circ H(P,k)$ en el caso de que $h.k = 1$, es:

$$x' = x + (1-h)(q-p)$$

que en nuestro caso se expresará

$$x' = x + \frac{3}{4}(-3,5,-2)$$

o sea

$$T \begin{cases} x' = x - \dfrac{9}{4} \\ y' = y + \dfrac{15}{4} \\ z' = z - \dfrac{6}{4} \end{cases}$$

La imagen de P (4,5,–2) por esta traslación es

$$P\ (4,5,-2) \xrightarrow{T} P'\ (\frac{7}{4}, \frac{35}{4}, -\frac{14}{4})$$

Consideremos ahora las ecuaciones de las respectivas homotecias H(C,4) y $H(O,\frac{1}{4})$

$$H(C,4) \begin{cases} x' = 4x - 9 \\ y' = 4y + 15 \\ z' = 4z - 6 \end{cases} \qquad H(O,\frac{1}{4}) \begin{cases} x' = \dfrac{1}{4}x \\ y' = \dfrac{1}{4}y \\ z' = \dfrac{1}{4}z \end{cases}$$

y las imágenes sucesivas de P

$$P\ (4,5,-2) \xrightarrow{H(C,4)} P'\ (7,35,-14) \xrightarrow{H(O,1/4)} P''(\frac{7}{4}, \frac{35}{4}, -\frac{14}{4})$$

36 ***Dadas las homotecias $H(P,2)$ y $H(Q,3)$ donde $P = (4,-1,0)$ y $Q = (-2,0,3)$, escribir las ecuaciones de la homotecia producto. Comprobar que la imagen del punto $X = (-1,-2,-3)$ es la misma por dicha homotecia que por la aplicación sucesiva de las dos homotecias.***

SOLUCION

Según la proposición 23.1 la ecuación de la homotecia producto $H(Q,h) \circ H(P,k)$ es

$$x' = h\,k\,x + (1-hk)\,c$$

donde $$c = \frac{(h - hk)\,p + (1 - h)\,q}{1 - hk}$$

En nuestro caso es

$$c = \frac{(3 - 6).(4,-1,0) + (-2).(-2,0,3)}{1 - 6} = \left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

y las ecuaciones serán

$$H(Q,3) \circ H(P,2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = 6x - 8 \\ y' = 6y + 3 \\ z' = 6z - 6 \end{array} \right.$$

por lo que la imagen de $X + (-1,-2,-3)$

$$X\,(-1,-2,-3) \xrightarrow{H(Q) \circ H(P)} X'\,(-14,-9,-24)$$

Si consideramos las ecuaciones de cada una de las homotecias

$$H(P) \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - 4 \\ y' = 2y + 1 \\ z' = 2z \end{array} \right. \qquad\qquad H(Q) \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x + 4 \\ y' = 3y \\ z' = 3z - 6 \end{array} \right.$$

y

$$X\,(-1,-2,-3) \xrightarrow{H(P)} X'\,(-6,-3,-6) \xrightarrow{H(Q)} X''\,(-14,-9,-24)$$

CAPITULO VIII
Curvas y superficies

1 *Escribir la ecuación implícita de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son*

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \dfrac{2}{t} \end{cases}$$

SOLUCION

Despejando t en la primera de las ecuaciones se obtiene $t = \dfrac{x}{2}$

y sustituyendo en la segunda, resulta

$$y = \frac{2}{x/2} = \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad xy = 4 \quad \Rightarrow \quad xy - 4 = 0$$

2 *Escribir las ecuaciones paramétricas de la elipse* $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

SOLUCION

De la ecuación dada se deduce : $a = 2$ $b = 4$ por lo que

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 4 \text{ sen } t \end{cases}$$

3 *Hallar el área del triángulo de vértices, en coordenadas polares, $(0,0^\circ),(3,25^\circ),(4,55^\circ)$.*

SOLUCION

Las coordenadas cartesianas de los tres puntos serán:

$(0 \cos 0^\circ , 0 \text{sen} 0^\circ)$ $(3\cos 25^\circ , 3\text{sen} 25^\circ)$ $(4\cos 55^\circ , 4\text{sen} 55^\circ)$

por lo que el área del triángulo que forman será:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 \cos 25^\circ & 3\text{sen} 25^\circ \\ 1 & 4 \cos 55^\circ & 4\text{sen} 55^\circ \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(12\text{sen} 55^\circ \cos 25^\circ - 12 \text{ sen} 25^\circ \cos 55^\circ) = 6 \text{ sen } (55^\circ - 25^\circ) = 6 \text{ sen} 30^\circ = 3$$

4 *Hallar la ecuación polar de una recta que pase por el punto $(5,60^\circ)$ y forme un ángulo de 135° con el eje polar.*

SOLUCION

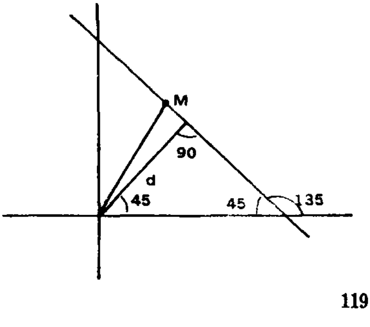
Como el ángulo que forma la perpendicular a la recta con OX es de 45°, la ecuación polar será

$$r. \cos(\vartheta - 45^\circ) = d$$

pero como pasa por $(5,60^\circ)$

$$5. \cos(60^\circ - 45^\circ) = d$$

es decir, $d = 5. \cos 15^\circ$



y la ecuación polar de la recta será: $r \cos(\vartheta - 45^\circ) = 5 \,.\, \cos 15^\circ$

5 *Hallar la naturaleza de la cónica cuya ecuación polar focal es* $r = \dfrac{12}{4 + 3\cos\varphi}$

SOLUCION

La ecuación polar focal de las cónicas es $r = \dfrac{p}{1 + e \cos\varphi}$

En nuestro caso podemos escribir

$$r = \frac{12}{4 + 3 \cos \varphi} = \frac{3}{1 + \dfrac{3}{4} \cos \varphi}$$

con lo que la excentricidad

$$e = \frac{3}{4} < 1$$

y la ecuación corresponde a una elipse.

6 *Escribir la ecuación en coordenadas polares y la ecuación polar focal de la cónica* $9x^2 + 4y^2 = 36$

SOLUCION

a) Para escribir la ecuación en coordenadas polares hacemos el cambio

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \\ y = R \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

por lo que

$$9\,(R^2 \cos^2 \varphi) + 4\,(R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) = 36$$

$$R^2\,(9 \cos^2 \varphi + 4 \operatorname{sen}^2 \varphi) = 36$$

$$R^2 = \frac{36}{9 \cos^2 \varphi + 4\,(1 - \cos^2 \varphi)} = \frac{36}{4 + 5 \cos^2 \varphi}$$

b) La ecuación de la cónica dada puede escribirse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

por lo que sabemos que es una elipse en la que:

Semieje mayor	$a = 3$
Semieje menor	$b = 2$
Semidistancia focal	$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$
Excentricidad	$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
Distancia de la directriz al origen	$\dfrac{a^2}{c} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$
Distancia de la directriz al foco	$d = \dfrac{a^2}{c} - c = \dfrac{9}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Ecuación polar focal $\quad r = \dfrac{e \,.\, d}{1 + e\cos\vartheta} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{5}}{3} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{5}}}{1 + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\cos\vartheta} = \dfrac{4}{3 + \sqrt{5}\cos\vartheta}$

7 ***Hallar el centro y el radio de la circunferencia que en coordenadas polares tiene por ecuación*** $r^2 - \sqrt{3}\, r\cos\vartheta - 4\, r \operatorname{sen}\vartheta + 15 = 0.$

SOLUCION

De la ecuación dada se deduce

$-\sqrt{3} = -2a \qquad -4 = -2b \qquad 15 = a^2 + b^2 - R^2$

donde (a,b) es el centro y R el radio

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad b = 2 \qquad R^2 = -15 + \dfrac{3}{4} + 4 = -\dfrac{41}{4}$

No existe tal circunferencia pues es imposible que

$$R = -\frac{41}{4}$$

8 ***Hallar la ecuación polar de la circunferencia que pasa por el polo y tiene el centro en (4,0°).***

SOLUCION

Siendo la ecuación polar de la circunferencia

$$r^2 - 2r\, d\cos(\vartheta - \alpha) + d^2 = R^2$$

donde (d,α) son las coordenadas polares del centro y R el radio, en nuestro caso

$$r^2 - 2r.\,4.\,\cos(\vartheta - 0^\circ) + 4^2 = 4^2$$

ya que si el centro es $(4,0^\circ)$ y pasa por el polo $(0,0^\circ)$ será $R = 4$

La ecuación queda pues

$$r^2 - 8r\cos\vartheta = 0$$

9 ***Hallar la ecuación polar de la recta que pasa por el punto (2,120°) y por el polo.***

SOLUCION

Según el número 3 (pag. 237) en este caso la ecuación se reduce a:

$$\vartheta = 120^\circ$$

10 ***Hallar las ecuaciones de las directrices de la elipse*** $9x^2 + 16y^2 = 144$, ***determinar sus focos y comprobar que la razón de distancias de un punto de la elipse a la directriz y al foco es igual a la excentricidad.***

SOLUCION

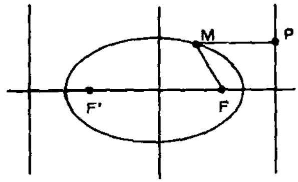
$9x^2 + 16y^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow a = 4\ ,\ b = 3\ ,\ c = \sqrt{7}$

Focos $\quad (\sqrt{7}\ , 0) \qquad (-\sqrt{7}\ , 0)$

Directrices

$$x=+\frac{a^2}{c} \qquad x=\frac{16}{\sqrt{7}} \quad ; \quad x=-\frac{a^2}{c} \qquad x=-\frac{16}{\sqrt{7}}$$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$



Distancia de un punto de al elipse M(x,y) al foco $F(\sqrt{7}, 0)$:

$$MF=\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}$$

Distancia del punto M a la directriz $x=\dfrac{16}{\sqrt{7}}$

$$MP=\frac{16}{\sqrt{7}}-x$$

Razón de distancias:

$$r=\frac{\sqrt{(x-\sqrt{7})^2+y^2}}{\dfrac{16}{\sqrt{7}}-x}$$

Por ser M(x,y) de la elipse se verifica

$$9x^2+16y^2=144 \qquad\qquad y^2=\frac{144-9x^2}{16}$$

por lo que

$$r=\frac{\sqrt{x^2-2\sqrt{7}\,x+7+\dfrac{144-9x^2}{16}}}{\dfrac{16-\sqrt{7}\,x}{\sqrt{7}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{7x^2-32\sqrt{7}\,x+256}}{4}}{\dfrac{16-\sqrt{7}\,x}{\sqrt{7}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{(16-\sqrt{7}\,x)^2}}{4}}{\dfrac{16-\sqrt{7}\,x}{\sqrt{7}}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

que coincide efectivamente con la excentricidad de la elipse.

11 *Dada la hipérbola* $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ *hallar: a) Ecuaciones de las directrices. b) Coordenadas de los focos. c) Excentricidad. Comprobar la definición vista en el texto.*

SOLUCION

De la ecuación dada se deduce: $a=3$, $b=2$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$

Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

Focos: $(\sqrt{13}, 0)$ $\quad(-\sqrt{13}, 0)$

Directrices: $x=\pm\dfrac{a^2}{c} \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{9}{\sqrt{13}}$, $\quad x=-\dfrac{9}{\sqrt{13}}$

Sea M(x,y) un punto de la hipérbola.

Distancia de M al foco

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-\sqrt{13}\,) + y^2}$$

Distancia de M a la directriz

$$MP = x - \frac{a^2}{c} = x - \frac{9}{\sqrt{13}}$$

Razón de distancias teniendo en cuenta que (x,y) verifican la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{MF}{MP} = \frac{\sqrt{(x-\sqrt{13})^2 + \dfrac{4x^2-36}{9}}}{x - \dfrac{9}{\sqrt{13}}} = \frac{\dfrac{\sqrt{9x^2-18\sqrt{13}x+117+4x^2-36}}{3}}{\dfrac{\sqrt{13}\,x-9}{\sqrt{13}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13x^2-18\sqrt{13}\,x+81}}{\sqrt{13}x-9} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

12 *Dibujar la lemmniscata de ecuación* $r^2 = 10 \cos 2\varphi$

SOLUCION

1 Periodo

$\cos 2\varphi = \cos 2(\varphi + T) \Rightarrow 2\varphi + 2T = 2\varphi + 360^\circ \Rightarrow T = 180^\circ$

Estudiaremos la función en el intervalo $[\,0^\circ\,, 180^\circ\,]$ de φ.

2 Dominio

r no está definido cuando:

$10 \cos 2\varphi < 0 \Leftrightarrow \cos 2\varphi < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < 2\varphi < 270^\circ \Leftrightarrow 45^\circ < \varphi < 135^\circ$

en el intervalo $[\,0^\circ\,, 180^\circ\,]$.

3 Igualdad de valores de r

$\cos 2\varphi = \cos 2\varphi' \Rightarrow 2\varphi + 2\varphi' = 360^\circ \Rightarrow \varphi' = 180^\circ - \varphi$

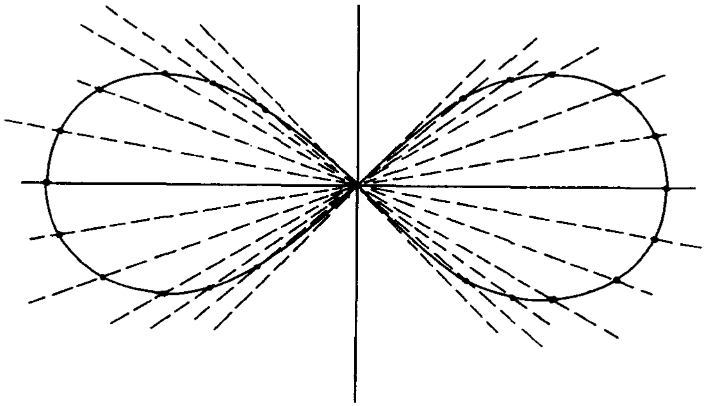
Así, calculado el valor de r para un ángulo φ, este valor de r sirve para $180 - \varphi$ y también para cada uno de los dos ángulos más 180° (período), por lo que con el valor de r correspondiente a φ tenemos el de

$$\varphi \quad , \quad 180^\circ - \varphi \quad , \quad \varphi + 180^\circ \quad , \quad 360^\circ - \varphi$$

con ello podemos construir la siguiente tabla de valores

φ (en grados)				r(aproximado a centésimas)
0	180	360		3'16
10	170	190	350	3'07
20	160	200	340	2'77
30	150	210	330	2'24
35	145	215	325	1'85
40	140	220	320	1'32
45	135	235	315	0

que da lugar a la siguiente gráfica:

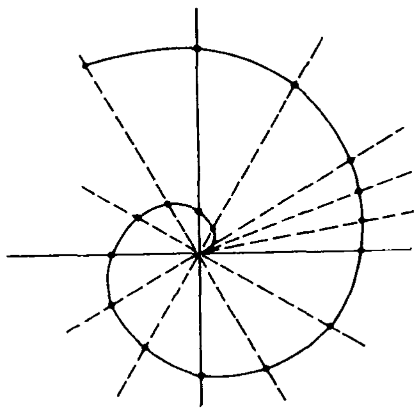


13 *Dibujar la espiral de Arquímedes de ecuación* $r = 4\varphi$

SOLUCION

Está definida para todos los valores de φ y no parece que tenga ningún período. Mediante una tabla de valores determinaremos aproximadamente su gráfica.

φ		r
en grados	en radianes	
0	0	0
10	0'175	0'7
20	0'350	1'4
30	0'524	2'1
60	1'047	2'8
90	1'571	6'3
120	2'094	8'4
150	2'618	10'5
180	3'142	12'6
210	3'665	14'7
240	4'189	16'8
270	4'712	18'8
300	5'236	20'9



14 *Dibujar el trébol de cuatro hojas de ecuación* $r = 8\ sen 2\varphi$

SOLUCION

Dominio: La función está definida para cualquier valor de φ

Período:

$$\text{sen } 2\varphi = \text{sen } 2(\varphi + T) \Rightarrow 2\varphi + 2T - 2\varphi = 360^\circ \Rightarrow T = 180^\circ$$

Valores coincidentes de r:

$$\text{sen } 2\varphi = \text{sen } 2\varphi'$$

$$2\varphi + 2\varphi' = 180^\circ \qquad \text{ó} \qquad 2\varphi + 2\varphi' = 540^\circ \quad ....$$

$$\varphi' = 90^\circ - \varphi \qquad\qquad \varphi' = 270^\circ - \varphi$$

Valores de signo contrario

$$\text{sen } 2\varphi' = -\text{ sen } 2\varphi$$

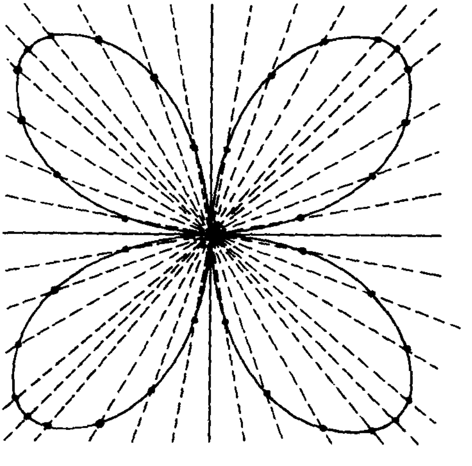
$$2\varphi' = 2\varphi + 180^\circ$$

$$\varphi' = \varphi + 90^\circ$$

Con todas estas relaciones es fácil construir la siguiente tabla de valores:

φ (en grados)					r (aproximadamente)
0	90	180	270	360	0
5	85	185	265		1'4
10	80	190	260		2'7
20	70	200	250		5'1
30	60	210	240		6'9
40	50	220	230		7'9
45		225			8
95	175	275	355		–1'4
100	170	280	350		–2'7
110	160	290	340		–5'1
120	150	300	330		–6'9
130	140	310	320		–7'8
135		315			–8

cuya representación aproximada es:



15 *Dibujar la curva de ecuación* $r = 2\ (1 + \text{sen } \varphi)$

SOLUCION

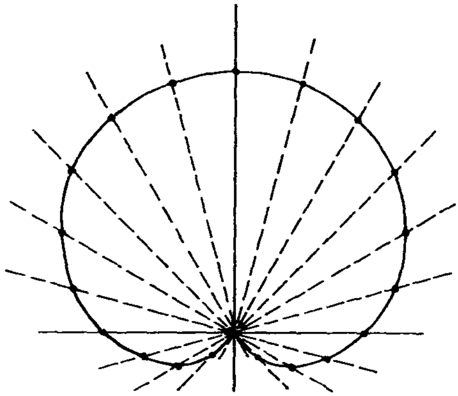
Período: $T = 2\pi$

Valores iguales:

$$\varphi' + \varphi = 180^\circ \qquad ó \qquad \varphi' + \varphi = 540^\circ$$
$$\varphi' = 180^\circ - \varphi \qquad\qquad \varphi' = 540^\circ - \varphi$$

Tabla de valores

φ (en grados)		r $\cong$
0	180	2
15	165	2'52
30	150	3
45	135	3'41
60	120	3'73
75	105	3'93
90		4
195	345	1'48
210	330	1
225	315	0'59
240	300	0'23
255	285	0'07
270		0



16 ***Hallar la ecuación de la esfera de centro (4,–3,5) tangente al plano XY.***

SOLUCION

La condición de tangencia al plano XY implica que el radio coincida con el segmento de perpendicular desde el centro (4,–3,5) al plano XY, y en consecuencia R = 5, de aquí que la ecuación sea:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 25$$

o bien

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 10z + 25 = 0$$

17 ***Hallar las coordenadas del centro y el radio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z = 7$.***

SOLUCION

De la ecuación se deduce:

$$\left\{\begin{array}{l} -6 = -2a \\ 4 = -2b \\ -8 = -2c \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{array}\right. \qquad \text{Centro} \quad (3,-2,4)$$

$$-7 = a^2 + b^2 + c^2 - R^2 \Rightarrow R^2 = 9 \leqslant 4 + 16 + 7 = 36 \Rightarrow R = 6$$

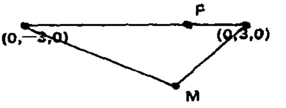
18 ***Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los dos puntos fijos (0,3,0) y (0,–3,0) sea igual a 5.***

SOLUCION

El problema no tiene solución.

En efecto: Cualquier punto P situado en el segmento que une los puntos fijos (0,3,0) y (0,–3,0) está a distancia tal de ellos que la suma coincide con la longitud del segmento o sea 6.

No hay pues ningún punto del segmento que pueda cumplir la condición impuesta. Y para cualquier otro punto M no situado en el segmento la suma de distancias a los puntos fijos es mayor que 6.



19 *Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a los dos puntos fijos (4,0,0) y (−4,0,0) sea igual a 6.*

SOLUCION

Sea P(x,y,z) un punto genérico. Pertenecerá al lugar geométrico si

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2+z^2} - \sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2-8x+16+y^2+z^2} = 6 + \sqrt{x^2+8x+16+y^2+z^2}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando términos se obtiene

$$-9-4x = 3\sqrt{x^2+y^2+z^2+8x+16}$$

$$81+72x+16x^2 = 9x^2+9y^2+9z^2+72x+144$$

$$7x^2-9y^2-9z^2 = 63$$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}-\frac{z^2}{7} = 1$$

ecuación que corresponde a un hiperboloide de dos hojas.

20 *Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del eje z y del plano XY.*

SOLUCION

Sea P(x,y,z) un punto genérico.

La distancia de este punto al eje z puede calcularse mediante la fórmula:

$$d = \frac{\| (\mathbf{p}-\mathbf{a}) \wedge \mathbf{v} \|}{\| \mathbf{v} \|}$$

donde **v**, vector director del eje z, es (0,0,1) y **a** = (0,0,0) siendo **p** = (x,y,z). Se obtiene

$$d = \sqrt{x^2+y^2}$$

La distancia de P al plano XY es evidentemente el valor de su tercera coordenada z.

Así el lugar geométrico es el de los puntos que cumplen

$$\sqrt{x^2+y^2} = z$$

o bien

$$x^2+y^2-z^2 = 0$$

que corresponde a un cono, no elíptico sino circular ya que las intersecciones con los planos $z = k$ son circunferencias

$$x^2+y^2 = k^2$$

21 *Hallar la ecuación de una esfera de centro (4,−4,6) y que pase por (6,−2,5).*

SOLUCION

Si el centro está en (4,−4,6) y pasa por (6,−2,5) el radio será la distancia entre los dos puntos.

$$R = \sqrt{(6-4)^2 + (-2+4)^2 + (5-6)^2} = 3$$

por lo que la ecuación de la esfera será:

$$(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-6)^2 = 9$$

22 *Hallar la ecuación de la esfera de centro (3,6,–4) y tangente al plano $2x - 2y - z - 10 = 0$*

SOLUCION

Si el centro está en (3,6,–4) y es tangente al plano $2x - 2y - z - 10 = 0$,el radio será la distancia del punto al plano

$$R = \frac{|\,2 \cdot 3 - 2 \cdot 6 - 1 \cdot (-4) - 10\,|}{\sqrt{4+4+1}} = 4$$

y la ecuación de la esfera será:

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 4^2$$

23 *Aplicar una traslación conveniente a la superficie de ecuación $3x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 6x - 16y + 8z = 13$ para que adopte una forma reducida estudiada e identificarla.*

SOLUCION

Sean
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

las ecuaciones de la traslación. De ellas se obtiene

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \\ z = z' - c \end{cases}$$

por lo que la relación que ligará a los puntos de la superficie con las nuevas coordenadas será:

$$3(x'-a)^2 + 4(y'-b)^2 - 2(z'-c)^2 + 6(x'-a) - 16(y'-b) + 8(z'-c) = 13$$

$$3(x'^2 - 2ax' + a^2) + 4(y'^2 - 2by' + b^2) - 2(z'^2 - 2cz' + c^2) + 6x' - 6a - 16y' + 16b + 8z' - 8z = 13$$

$$3x'^2 + 4y'^2 - 2z'^2 + (-6a+6)x' + (-8b-16)y' + (4c+8)z' + (3a^2 + 4b^2 - 2c^2 - 6a + 16b - 8c) = 13$$

Para adoptar forma reducida es preciso tomar a, b y c de manera que se anulen los coeficientes de x',y' y z', o sea

$$a = 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad c = -2$$

Con estos valores la ecuación queda:

$$3x'^2 + 4y'^2 - 2z'^2 = 24 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{6} - \frac{z'^2}{12} = 1$$

que corresponde a un hiperboloide de una hoja.

24 *Por medio de una traslación reducir la ecuación de la superficie $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$ e identificarla.*

SOLUCION

Utilizaremos las ecuaciones de la traslación del ejercicio anterior.

La ecuación de la superficie en las nuevas coordenadas será:

$$2(x'-a)^2 - 3(y'-b)^2 - 2(z'-c) - 8(x'-a) + 6(y'-b) - 12(z'-c) - 21 = 0$$

de donde

$$2x'^2 - 3y'^2 - 2z'^2 + (-4a-8)x + (6b+6)y + (4c-12)z + (2a^2 - 3b^2 - 2c^2 + 8a - 6b + 12c - 21) = 0$$

y para reducir su expresión debe tomarse

$$a = -2 \quad , \quad b = -1 \quad , \quad c = 3$$

con cuyos valores la ecuación queda

$$2x'^2 - 3y'^2 - 2z'^2 = 8 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{8/3} - \frac{z'^2}{4} = 1$$

correspondiente a un hiperboloide de dos hojas.

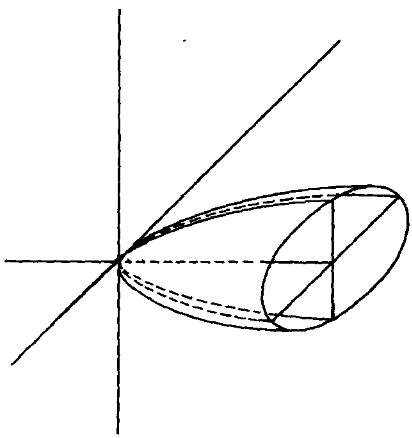
25 *Estudiar y representar la superficie de ecuación* $3x^2 + z^2 - 4y = 0$

SOLUCION

La ecuación dada puede escribirse: $\dfrac{x^2}{4/3} + \dfrac{z^2}{1/3} - y = 0$

que corresponde a un paraboloide elíptico de eje Y.

Efectivamente:



Intersección con XY (z=0)

$$y = \frac{3}{4}x^2$$

parábola de eje y pasando por el origen.

Intersección con YZ (x=0)

$$y = \frac{1}{4}z^2$$

parábola de eje y por el origen.

Intersección con XZ (y=0)

$$3x^2 + z^2 = 0$$

que solo tiene la solución $x = 0, z = 0$.

Intersección con los planos $y = k$

$$\frac{x^2}{4/3} + \frac{z^2}{1/3} = k \qquad\qquad \frac{x^2}{4k/3} + \frac{z^2}{k/3} = 1$$

que corresponde a elipses siempre que $k > 0$.

Su representación gráfica será la de la figura adjunta.

26 *Estudiar y representar la superficie de ecuación* $y^2 - 4z^2 + 4x = 0.$

SOLUCION

La ecuación dada puede escribirse $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{1} + x = 0$

que corresponde a la forma reducida de un paraboloide hiperbólico.

Efectivamente:

Intersección con XY ($z = 0$).

$$x = -\frac{1}{4}y^2$$

Parábola de eje X abierta hacia el semieje negativo de X y que pasa por el origen.

Intersección con XZ ($x = 0$)

$$x = z^2$$

Parábola de eje X abierta hacia el semieje positivo X y que pasa por el origen.

Intersección con YZ ($x = 0$)

$$y^2 - 4z^2 = 0$$

$$(y - 2z)(y + 2z) = 0$$

que representa un par de rectas.

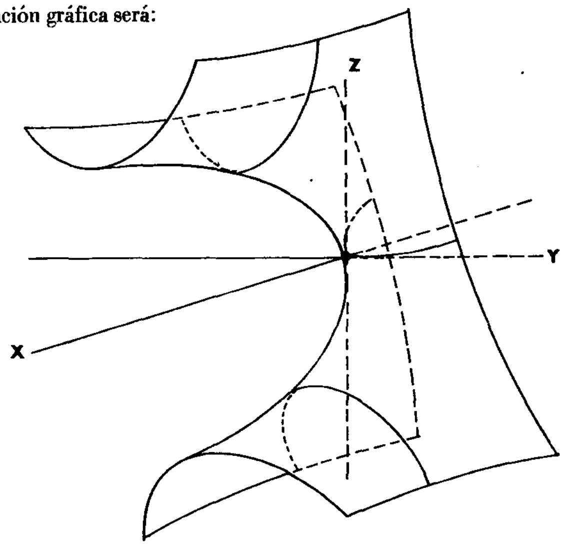
Intersección con los planos de ecuación $x = k$

$$y^2 - 4z^2 = -4k$$

$$\frac{y^2}{-4k} + \frac{z^2}{k} = 1$$

hipérbolas, tanto para $k > 0$ como para $k < 0$.

La representación gráfica será:

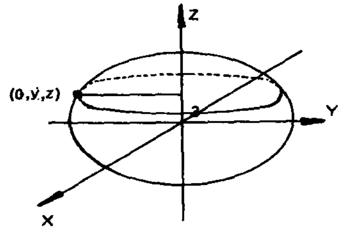


27 *Hallar la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de la elipse $y^2 + 4z^2 - 16 = 0$ alrededor del eje z.*

SOLUCION

Ecuaciones paramétricas de la elipse dada

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \text{ sen } \varphi \\ z = 2 \cos \varphi \end{cases}$$

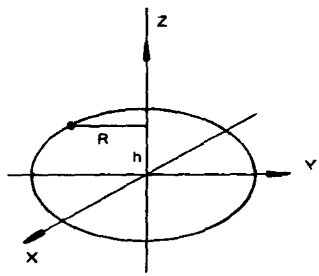


Al girar alrededor del eje z, un punto de la elipse describe una circunferencia de radio la y de la elipse, manteniéndose constante la tercera coordenada por lo que las ecuaciones paramétricas del elipsoide serán:

$$\begin{cases} x = 4 \text{ sen } \alpha \cos\beta \\ y = 4 \text{ sen } q \text{ sen } \beta \\ z = 2 \cos \alpha \end{cases}$$

En forma implícita:

Como el radio y la altura sobre el plano XY de los puntos que giran se corresponden con la "y" y la "z" de los puntos de la elipse están ligados por la relación:



$$R^2 + 4h^2 - 16 = 0$$

por lo que, como

$$R^2 = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad h = z$$

resulta

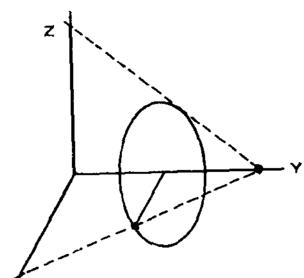
$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 16 = 0$$

28 *Hallar la ecuación de la superficie de revolución engendrada por la recta $3x + 2y - 5 = 0$ al girar alrededor del eje y.*

SOLUCION

Ecuaciones paramétricas de la recta dada

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}\alpha \\ z = 0 \end{cases}$$



Al revolucionar alrededor del eje y los puntos de la recta describen circunferencias de radio x, por lo que las ecuaciones paramétricas del cono serán:

$$\begin{cases} x = \alpha \cos \beta \\ y = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \text{ sen } \beta \end{cases}$$

En forma implícita: Siendo la recta $3x + 2y - 5 = 0$ o bien $x = \dfrac{5 - 2y}{3}$

por lo que el radio y la altura sobre el plano XZ están relacionados por

$$R = \frac{5 - 2h}{3}$$

Como al efectuar la revolución alrededor del eje OY, se describen circunferencias de ecuación $x^2 + z^2 = R^2$, resulta como ecuación de la superficie

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{5 - 2y}{3}\right)^2$$

o bien

$$9x^2 - 4y^2 + 9z^2 + 20y - 25 = 0$$

29 ***Determinar las ecuaciones paramétricas del cono de vértice en el punto (4,2,0) y directriz la circunferencia*** $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCION

La circunferencia dada tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi \\ y = 3 \operatorname{sen} \varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

por lo que la generatriz del cono será:

$$\begin{cases} x = 4 + t\,(3 \cos \varphi - 4) \\ y = 2 + t\,(3 \operatorname{sen} \varphi - 2) \\ z = 0 + t\,(0 - 0) \end{cases}$$

La superficie tiene pues por ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \cos \varphi - 4t \\ y = 2 + 3t \operatorname{sen} \varphi - 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

que es una superficie plana situada en XY ya que z = 0, lo cual, podía haberse ya previsto pues el vértice del cono está en el mismo plano que la circunferencia directriz.

30 ***Determinar las ecuaciones paramétricas de un cilindro engendrado por las rectas paralelas a la*** $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{2}$ ***que se apoyan en la elipse*** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

SOLUCION

La elipse dada tiene por ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi \\ y = 4 \operatorname{sen} \varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

por lo que la recta R paralela a la dada cuyo vector director es (3,4,2), tendrá por ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi + t.3 \\ y = 4 \operatorname{sen} \varphi + t.4 \\ z = 0 \qquad\quad + t.2 \end{cases}$$

y la superficie cilíndrica tiene por ecuaciones

$$x = 3\,(\cos \varphi + t) \;\; ; \;\; y = 4\,(\operatorname{sen}\varphi + t) \;\; ; \;\; z = 2t$$

CAPITULO IX
Función real de variable real. Continuidad

1 *Dada la función polinómica $f(x) = x^3 - x + 3$, hallar, aplicando el Teorema de Bolzano, una entero n tal que sea $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.*

SOLUCION

Basta tomar $n = -2$ pues la función dada es continua en el intervalo $[-2,-1]$ y además

$$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 3 = -3 < 0$$
$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 3 = \quad 3 > 0$$

es decir, toma signos contrarios en los extremos de dicho intervalo. El Teorema de Bolzano afirma que existe por lo menos un cero de f(x) en el intervalo $(-2,-1)$.

2 *Justificar que la función polinómica $f(x) = x^5 + x + 1$ tiene un cero comprendido entre -1 y 0.*

SOLUCION

$$f(-1) = (-1)^5 + (-1) + 1 = -1 < 0$$
$$f(\ 0) = \quad 0 \quad + \quad 0 + 1 = \quad 1 > 0$$

lo que, al ser la función continua en el intervalo $[-1,0]$, nos permite afirmar, aplicando el Teorema de Bolzano, que f(x) tiene por lo menos un cero en el intervalo $(-1,0)$.

3 *Para cada una de las siguientes funciones polinómicas, $f(x)$, hallar un entero n tal que sea $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.*

a) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

SOLUCION

Basta tomar $n = -4$ ya que

$$f(-4) = (-4)^5 + 5(-4)^4 + 2(-4) + 1 = -1024 + 1280 - 8 + 1 = 249 > 0$$
$$f(-5) = (-5)^5 + 5(-5)^4 + 2(-5) + 1 = -3125 + 3125 - 10 + 1 = -9 < 0$$

y aplicar el Teorema de Bolzano a la función continua dada en el intervalo $[-5,-4]$.

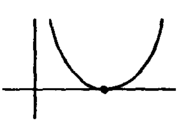
b) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$

SOLUCION

Para $x = 0$ $\qquad f(0) > 0$

Para $x = 1$ $\qquad f(1) > 0$

y en cambio $f(\frac{1}{2}) = 0.$



4 *Demostrar que existe algún número real x rtal que $sen\ x = x$.*

SOLUCION

Consideremos la función

$$f(x) = \text{sen}\ x - x$$

que es continua en todo R, por ser diferencia de funciones continuas.

Como que

$$f(-\pi) = \text{sen }(-\pi) - (-\pi) = 0 + \pi = \pi > 0$$

$$f(\ \pi) = \text{sen }\pi - \pi = 0 - \pi = -\pi > 0$$

aplicando el Teorema de Bolzano al intervalo $[-\pi,\pi]$ éste nos asegura que existe un $\alpha \in (-\pi, \pi)$ tal que $f(x) = 0$, es decir

$$\text{sen }\alpha = \alpha$$

5 *Comprobar si la función $f(x) = x^2$ está acotada superior o inferiormente en el intervalo $(-1,1)$.*

SOLUCION

Es evidente que al ser $f(x) = x^2$ siempre positiva o nula para cualquier x, será $f(x) > 0$ para todo $x \in (-1,1)$ y en consecuencia cualquier número real negativo será una cota inferior de dicha función.

Como en $x \in (-1,1)$ es $-1 < x < 1$ es decir $|x| < 1$, se verifica que $x^2 < 1$ lo cual indica que en el intervalo $(-1,1)$ la función está acotada superiormente por el número 1 ó cualquier número real mayor que 1.

6 *Para cada una de las siguientes funciones decidir cuáles están acotadas superior o inferiormente en el intervalo indicado y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo.*

a) $f(x) = x^2$ *en* $[2, 3]$

SOLUCION

Como $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo cerrado $[2,3]$, el Teorema 3.2 (Pag 264), nos asegura que está acotada (tanto superior como inferiormente) en dicho intervalo y,además, el Teorema 3.3 (pag 265) nos dice que en dicho intervalo alcanza el máximo y el mínimo absolutos.

b) $f(x) = x^3$ *en* $[1, 5]$

SOLUCION

Son válidos en este caso los razonamientos y conclusiones del anterior.

c) $f(x) = x^3$ *en* $(-1, 1)$

Para la función $f(x) = x^3$ en el intervalo abierto $(-1,1)$ no pueden aplicarse los teoremas 3.2 y 3.3. Hay que hacer el estudio por otro camino.

Como si $a < b$ es $a^3 < b^3$, para $a,b \in R$, resulta que la función $f(x) = x^3$ es creciente en el intervalo $(-1,1)$. Por tanto, para todo $x \in (-1,1)$, es decir para x tal que $-1 < x < 1$ es $(-1)^3 < x^3 < 1^3$ es decir $-1 < f(x) < 1$ lo cual indica que la función dada está acotada en $(-1,1)$.

Ahora bien $f(x) = x^3$ no alcanza el máximo absoluto en ningún punto de $(-1,1)$, pues si por ejemplo fuera M el máximo y a un punto de $(-1,1)$ en el que lo alcanzara,esdecir, tal que $f(a) = M$ como $a \in (-1,1)$, sería $-1 < a < 1$. Al considerar un x tal que $-1 < a < x < 1$ se verificaría, por el crecimiento de $f(x)$ en $(-1,1)$, que $f(a) < f(x) < f(1)$, es decir $M < f(x) \quad x \in (a, 1)$ lo cual contradice la definición de máximo absoluto.

Analogamente se justifica para el mínimo absoluto.

CAPITULO X
Funciones derivables. Regla de l'Hôpital

1 *Demostrar que la función $f(x) = x^2$ es derivable en el punto $x = 5$.*

SOLUCION

Debe comprobarse la existencia del límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h}$$

ya que el mismo es el valor de la derivada en el punto $x = 5$.

Como

$$\lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 - 5^2}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{25 + 10h + h^2 - 25}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{10h + h^2}{h} = 10$$

la derivada de la función dada en el punto $x = 5$ es: $f'(5) = 10$.

2 *Hallar la función derivada de la función $f(x) = 8x^3$*

SOLUCION

La función derivada será:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8\,(x+h)^3 - 8x^3}{h}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{8(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 8x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{24x^2h + 24xh^2 + 8h^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (24x^2 + 24xh + 8h^2) = 24x^2$$

y la fnnción derivada de $f(x) = 8x^3$ es : $f'(x) = 24x^2$.

3 *Demostrar que la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.*

4 *Demostrar que la derivada de un producto $f.g$ de dos funciones es:*

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

5 *Demostrar que la derivada de un cociente $\dfrac{f}{g}$ de dos funciones es*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

SOLUCION

Consultar un libro de texto de segundo de bachillerato.

6 *Hallar las cinco primeras derivadas de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 8x^7 - 3x^6 + 5x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + 1$

SOLUCION

$$f(x) = 8x^7 - 3x^6 + 5x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + 1$$
$$f'(x) = 56x^6 - 18x^5 + 25x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$f''(x) = 336x^5 - 90x^4 + 100x^3 - 12x^2 - 6x + 2$$
$$f'''(x) = 1680x^4 - 360x^3 + 300x^2 - 24x - 6$$
$$f\quad(x) = 6720x^3 - 1080x^2 + 600x - 24$$
$$f\quad(x) = 20160x^2 - 2160x + 600$$

b) $g(x) = \text{sen } x$

SOLUCION

$$g(x) = \text{sen } x$$
$$g'(x) = \cos x$$
$$g''(x) = -\text{sen } x$$
$$g'''(x) = -\cos x$$
$$g\quad(x) = \text{sen } x$$
$$g\quad(x) = \cos x$$

c) $h(x) = Ln\ x$

SOLUCION

$$h(x) = Ln\ x$$
$$h'(x) = \frac{1}{x}$$
$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$h'''(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$h\quad(x) = -\frac{6}{x^4}$$
$$h\quad(x) = \frac{24}{x^5}$$

5 *Indicar, justificándolo, si la función $f(x) = x^2 + x + 1$ es creciente o decreciente en el punto $x = 8$.*

SOLUCION

La función $f(x) = x^2 + x + 1$ es creciente en el punto $x = 8$ si su derivada en dicho punto es positiva. Como la derivada es

$$f'(x) = 2x + 1$$

y su valor en $x = 8$ es $f'(8) = 17 > 0$, dicha función es creciente en el punto $x = 8$.

8 *Hallar los puntos en que es creciente y aquellos en que es decreciente la función:*

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x + 5$$

SOLUCION

Los puntos en los que la función f(x) es creciente son aquellos para los cuales $f'(x) > 0$.

Como $f'(x) = x^3 - 2$, los puntos de crecimiento serán los que verifiquen la desigualdad

$$x^3 - 2 > 0$$

es decir

$$x^3 > 2 \quad \Rightarrow \quad x > \sqrt[3]{2}$$

Analogamente, los puntos de decrecimiento serán los que verifiquen $f'(x) > 0$, es decir, en nuestro caso:

$$x^3 - 2 < 0$$

o bien

$$x^3 < 2 \quad \Rightarrow \quad x < \sqrt[3]{2}$$

9 *Hallar los puntos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

SOLUCION

$$f'(x) = 6x - 2$$

Crecimiento: $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow 6x - 2 > 0 \quad \Rightarrow x > \frac{2}{6} \quad \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

Decrecimiento: $f'(x) < 0 \quad \Rightarrow 6x - 2 < 0 \quad \Rightarrow x < \frac{2}{6} \quad \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

b) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

SOLUCION

$$g'(x) = \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

$g'(x) < 0$ para cualquier valor de x.

Por tanto g(x) es decreciente para todos los valores x de su campo de definición.

c) $h(x) = Ln\,(x^2 - 1)$.

SOLUCION

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Cuyo signo es el mismo que el del producto:

$$2x\,(x^2 - 1) = 2x\,(x-1)\,(x+1)$$

que debe estudiarse en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ en que la función está definida.

En $(-\infty, -1)$ se tiene:

$$x < -1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ x+1 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g'(x) < 0$$

por lo que la función g(x) es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$.

En $(1, \infty)$ se tiene:

$$x > 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad g'(x) > 0$$

por lo que la función g(x) es creciente en el intervalo $(1, \infty)$

d) $k(x) = (x+1).\, e^x$

SOLUCION

$$k'(x) = e^x + (x+1).\, e^x = (x+2).\, e^x$$

cuyo signo viene dado por el de $(x+2)$, pues e^x es siempre positivo.

Así pues:

si $x + 2 > 0$ es $k'(x) > 0$

si $x + 2 < 0$ es $k'(x) < 0$

y en consecuencia:

k(x) es creciente para $x > -2$

k(x) es decreciente para $x < -2$

10 *Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en el intervalo cerrado $[-2, 5]$.*

SOLUCION

Dicho máximo y dicho mínimo existen, pues la función f(x) es continua en el intervalo cerrado dado.

Para hallarlos es necesario buscar los valores de x que anulan la primera derivada de f(x).

$$f'(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Como

$$f''(x) = 2 \quad \text{para } x = 1$$

f(x) tiene un mínimo en dicho punto.

Por otra parte, como:

$$f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x > 1$$

f(x) es creciente para dichos valores.

Además:

$$f'(x) < 0 \quad \text{si} \quad x < 1$$

y f(x) es decreciente para dichos valores de x.

Finalmente, como se tiene:

$$f(-2) = -9 \qquad y \qquad f(5) = 16$$

resulta que el máximo de f(x) se encuentra en el extremo $x = 5$.

11 *Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.*

SOLUCION

Dicho máximo y mínimo existen, pues la función f(x) es continua en el intervalo cerrado dado.

Para hallarlos es necesario buscar los valores de x que anulan f'(x).

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{6}$$

esto es: $\quad x = 2 \quad y \quad x = -\dfrac{4}{3}$

Analizando el signo de la segunda derivada en dichos puntos se tiene:

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(2) = 10 \Rightarrow \text{f(x) tiene el mínimo en el punto } x = 2$$

$$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = -10 \Rightarrow \text{f(x) tiene el máximo en el punto } x = -\frac{4}{3}$$

12 *Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^5 + x + 1}$ en el intervalo cerrado $\left[-\dfrac{1}{2}, 1 \right]$.*

SOLUCION

En el intervalo considerado la función f(x) es continua, pues sus únicos puntos de discontinuidad son los valores que anulan el denominador y estos no están en dicho intervalo.

Para hallarlos es necesario buscar los valores de x que anulan f(x).

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 1}{(x^5 + x + 1)^2}$$

y que en este caso no existen por ser $f'(x) > 0$ para cualquier valor de x.

Por tanto f(x) es creciente en dicho intervalo y el máximo y el mínimo están situados en sus extremos, el máximo en $x = 1$ y el mínimo en $x = -1/2$.

13 *Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$

SOLUCION

El campo de definición de f(x) es R.

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0 \Rightarrow x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 540}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{24 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{24 \pm 6}{6} = \quad \frac{5}{3}$$

Los posibles máximos y mínimos estarán en $x = 5$ y $x = 3$.

$$f''(x) = 6x - 24$$

$$f''(5) = 6 > 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \text{mínimo}$$

$$f''(3) = -6 < 0 \qquad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \text{máximo.}$$

b) $$f(x) = \frac{x^3}{(1 + x)^2}$$

SOLUCION

Campo de definición: $\{x \in R \mid x \neq -1\}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 (1 + x)^2 - x^3\, 2 (1 + x)}{(1 + x)^4} = \frac{x^2 (3 + x)}{(1 + x)^3}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x^2 (3 + x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ y } x = -3$$

$$f''(x) = \frac{[\, 2x (3 + x) + x^2 \,] (1 + x)^3 - x^2 (3 + x)\, 3 (1 + x)^2}{(1 + x)^6}$$

$$f''(-3) = \frac{9 (-2)^3}{(-2)^6} = \frac{9}{(-2)^3} = -\frac{9}{8} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en } x = -3 \text{ hay máximo.}$$

$$f''(0) = 0$$

Analizando el comportamiento de $f(x)$ en un entorno de $x = 0$, se tiene:

para $-1 < x < 0$ es $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente

para $0 < x$ es $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ es creciente

lo que nos indica que en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.

c) $$f(x) = \frac{x^2}{2 - x}$$

SOLUCION

Campo de definición: $\{x \in R \mid x \neq 2\}$.

$$f'(x) = \frac{2x (2 - x) - x^2 (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{x (4 - x)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \quad x (4 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ y } x = 4$$

$$f''(x) = \frac{(4 - 2x) (2 - x)^2 - (4x - x^2)\, 2 (2 - x)}{(2 - x)^2} = \frac{2 (2 - x)^3 - 2x (4 - x)(2 - x)}{(2 - x)^2}$$

$$f''(0) = \frac{2 . 2^3 - 0}{2^2} = 2 . 2 = 4 > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en } x = 0 \text{ hay mínimo}$$

$$f''(4) = \frac{2(-2)^3 - 0}{(-2)^2} = 2.(-2) = -4 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en } x = 4 \text{ hay máximo.}$$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x}}$.

SOLUCION

Campo de definición: $\{ x \mid \frac{x}{a} + \frac{a}{x} \geqslant 0 \}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}}{2\sqrt{\frac{x}{a} + \frac{a}{x}}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{a}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a$$

De ambos valores solo es útil aquel para el cual $\frac{x}{a} + \frac{a}{x} \geqslant 0$

Si se supone $a > 0$, el valor de x válido será $x = +a$.

Si se supone $a < 0$, el valor de x válido será $x = -a$.

Supongamos que $a > 0$, se tendrá:

$$f''(a) = \frac{\sqrt{2}}{2a^2} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en } x = a \text{ hay mínimo.}$$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

SOLUCION

Campo de definición : R .

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2+x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+x+1)^2 - (2x^2-2)\,2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$

$$f''(-1) = \frac{-4}{1} = -4 < 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en } x = -1 \text{ hay máximo.}$$

$$f''(1) = \frac{4}{9} > 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{en } x = 1 \text{ hay mínimo.}$$

14 *Como aplicación del Teorema de Rolle, demostrar que entre dos ceros de un polinomio $P(x)$ existe por lo menos un cero de la derivada $P'(x)$ y que entre dos ceros consecutivos del polinomio derivado $P'(x)$ hay a lo sumo un cero del polinomio $P(x)$.*

SOLUCION

Puede encontrarse la demostración en el capítulo 13, pag 341.

15 *Verificar que la función $f(x) = x - x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los intervalos cerrados $[-1, 0]$ y $[0, 1]$. Hallar los correspondientes valores de α tales que $f'(\alpha) = 0$.*

SOLUCION

f(x) cumple las condiciones del teorema de Rolle en $[-1, 0]$ ya que:

* Es continua en dicho intervalo.
* Es derivable en $(-1, 0)$.
* $f(-1) = f(0)$ ya que $f(-1) = 0$ y $f(0) = 0$

Por tanto, existe un $\alpha \in (-1, 0)$ en el cual $f'(\alpha) = 0$

Como $f'(\alpha) = 1 - 3\alpha^2$ se tiene:

$$f'(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 3\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{3}}$$

Al ser $\alpha \in (-1, 0)$ para el valor $\frac{1}{-\sqrt{3}}$, éste es el valor buscado.

Analogamente se procede para el intervalo $[0 , 1]$.

En dicho intervalo el valor de α buscado es : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

16 *¿Se cumplen las condiciones del teorama de Rolle para la función $f(x) = tgx$ en el intervalo $[0 , \pi]$?.*

SOLUCION

No, pues en dicho intervalo la función $f(x) = tg(x)$ no es continua: posee un punto de discontinuidad en $x = \frac{\pi}{2}$

17 *Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy por las funciones:*

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = x^3 - 1$$

en el intervalo $[1 , 2]$ y hallar α.

SOLUCION

f(x) y g(x) cumplen las condiciones del teorema de Cauchy en $[1 , 2]$ ya que:

* Son continuas en $[1 , 2]$.
* Son derivables en $(1 , 2)$.

En consecuencia, existe un punto $\alpha \in (1 , 2)$ en el cual se verifica:

$$f(2) - f(1) \ . \ g'(\alpha) = g(2) - g(1) \ . \ f'(\alpha)$$

Es decir, como se tiene en este caso:

$$f(2) = 5 \ , \ f(1) = 2 \ , \ g'(\alpha) = 3\alpha^2 \ , g(2) = 7 \ , \ g(1) = 0 \ , f'(\alpha) = 2\alpha$$

la igualdad del teorema de Cauchy se escribirá:

$$(5-2)\,.\,3\alpha^2=(7-0).\,2\alpha$$

o bien

$$9\alpha=14\alpha$$

de donde, los posibles valores de α que verifican esta igualdad son:

$$\alpha=0 \qquad \text{y} \qquad \alpha=\frac{14}{9}$$

De ambos solo $\alpha=\dfrac{14}{9}$ pertenece al intervalo (1 , 2), éste es el valor pedido.

18 *Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema del valor medio para la función:*

$$f(x)=3x^2+4x+1$$

en el intervalo $[3\,,5]$ *y hallar el correspondiente valor intermedio* α.

SOLUCION

f(x) cumple las condiciones del teorema del valor medio en [3 , 5] ya que:

* Es continua en [3 , 5] .
* Es derivable en (3 , 5) .

En consecuencia, existe un $\alpha\in(3\,,5)$ en el cual se verifica :

$$f(5)-f(3)=f'(\alpha)\,(5-3)$$

es decir, como $f(5)=96$, $f(3)=40$ y $f'(\alpha)=6\alpha+4$, se tiene:

$$96-40=(6\alpha+4)\,.\,2 \quad\Rightarrow\quad 56=12\,\alpha+8 \quad\Rightarrow\quad \alpha=4$$

Como $\alpha=4\in(3\,,5)$, éste es el valor buscado.

19 *¿Puede cumplirse el teorema del valor medio para la función*

$$f(x)=\frac{x^3+2x}{x+1}$$

en el intervalo $[-2\,,5]$*? Justificar la respuesta.*

SOLUCION

No, puesto que al ser f(x) discontinua en el punto $x=-1$ y ser $-1\in[-2\,,5]$, f(x) no es continua en el intervalo dado.

20 *En el segmento de la parábola* $y=x^2$ *comprendido entre los puntos* $A(1,1)$ *y* $B(3,9)$ *hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda* AB.

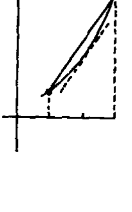
SOLUCION

El punto buscado tendrá unas coordenadas $(\alpha\,,\beta)$ que tienen que cumplir:

– $\beta=\alpha^2$

– La pendiente de la curva en el punto (α,β) tiene que ser igual a la de la cuerda AB. Como esta es:

$$m=\frac{9-1}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$



resulta que tiene que verificarse $2\alpha = 4$, es decir $\alpha = 2$.

Por tanto el punto buscado es el que tiene por coordenadas $(2, 4)$.

21 ***Aplicando la regla de l'Hôpital, hallar los siguientes límites:***

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x}$$

SOLUCION

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$ puede pues aplicarse la regla de l'Hôpital.

Derivando numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{x + \operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{0}{0}$$

SOLUCION

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{0}{0}$$ puede pues aplicarse la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x}{2(1 - \cos x) \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$ puede aplicarse nuevamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{3.2x \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x + 3x_2^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \quad + 2(1 - \cos x) \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

puede aplicarse otra vez la regla de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6 - 3x^2) \operatorname{sen} x + (18x - 6x^2 - x^3) \cos x}{6 \operatorname{sen} x \cos x - 2 \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

nuevamente deberá aplicarse la regla de l'Hôpital, obteniéndose

$$\lim_{x\to 0} \frac{(-6x - 18x + 6x^2 + x^3) \operatorname{sen} x + \quad (6 - 3x^2) + (18 - 12x - 3x^2) \quad \cos x}{6\cos^2 x - 6\operatorname{sen}^2 x - 2\cos x} =$$

$$= \frac{0 + (6 + 18)}{6 - 2} = \frac{24}{4} = 6 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{(1 - \cos x)^2} = 6$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

SOLUCION

Puede aplicarse la regla de l'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x-3} = 1$$ y el límite buscado es 1.

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{tgx}$$

SOLUCION

Puede aplicarse la regla de l'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \cos^3 x = 1$$ por lo que el límite pedido es 1.

e) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

SOLUCION

Puede aplicarse la regla de l'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x-2}} = \infty$$ por lo que el límite pedido es ∞.

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{Lnx}{cotgx}$$

SOLUCION

Por ser del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ puede aplicarse la regla de l'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{sen^2\, x}{x} = \frac{0}{0}$$ que permite aplicar nuevamente la regla y obtener:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{2\, senx\, cosx}{1} = 0$$ por lo que el límite pedido es 0.

g) $$\lim_{x\to \infty} \frac{Lnx}{\sqrt[3]{x}}$$

SOLUCION

Por ser del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ puede aplicarse la regla de l'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} = 0$$ por lo que el límite pedido es 0.

h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{Lnx}$

SOLUCION

Por ser de la forma $\infty - \infty$ no puede aplicarse directamente l'Hôpital.

Efectuando la operación contenida en el paréntesis se obtiene:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\mathrm{Ln}x} = \lim_{x\to 1} \frac{x\mathrm{Ln}x - x + 1}{x\,\mathrm{Ln}x - \mathrm{Ln}\,x} = \frac{0}{0}$$

lo que nos permite aplicar la regla de l'Hôpital obteniéndose:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{Ln}x}{\mathrm{Ln}x + 1 - \dfrac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

nuevamente se aplica dicha regla obteniéndose:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + 0 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$ y el límite pedido es $\frac{1}{2}$.

i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{sen^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

SOLUCION

Por ser de la forma $\infty - \infty$ no puede aplicarse directamente la regla de l'Hôpital.

Efectuando la operación contenida en el paréntesis se obtiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \mathrm{sen}^2 x}{x^2 \mathrm{sen}^2 x} = \frac{0}{0}$$

lo que nos permite aplicar la regla de l'Hôpital obteniéndose:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \mathrm{sen}2x}{2x\mathrm{sen}^2 x + x^2 \mathrm{sen}\,2x} = \frac{0}{0}$$

nuevamente se aplica dicha regla obteniéndose:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\mathrm{sen}^2 x + 2x\,\mathrm{sen}2x + x^2 \cos 2x} = \frac{0}{0}$$ que permite aplicarla de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}2x}{3\mathrm{sen}2x + 6x\cos 2x - 2x^2\,\mathrm{sen}2x} = \frac{0}{0}$$ que permite aplicarla de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\cos 2x}{6\cos 2x + 6\cos 2x - 12x\,\mathrm{sen}2x - 4x\,\mathrm{sen}2x - 4x^2\cos 2x} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

por lo que el límite buscado es $\frac{1}{3}$.

j) $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) \cdot \mathrm{tg}x$

SOLUCION

El límite solicitado es determinado y su valor es 0.

k) $\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{x}$

SOLUCION

Por ser de la forma $\infty \cdot 0$ no puede aplicarse directamente l'Hôpital.

Dado que:

$$x \cdot \mathrm{sen}\, x = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}$$

resulta que:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \mathrm{sen}\,\frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sen}\,\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

y ahora sí, puede aplicarse la regla de l'Hôpital, y se tiene:

$$\lim_{x\to a} \frac{a\cos\frac{a}{x}}{1} = a$$ y el límite buscado es a.

CAPITULO XI

Fórmula de Taylor. Estudio local de una función

1 *Desarrollar el polinomio $f(x) = x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 4x^2 + 6x - 5$ en potencias enteras y positivas de $x - 2$.*

SOLUCION

Los coeficientes del desarrollo son los restos de las sucesivas divisiones de f(x) por $x - 2$. Tenemos, por la regla de Ruffini:

	1	-4	8	-4	6	-5
2		2	-4	8	8	28
	1	-2	4	4	14	$23 = b_0$
2		2	0	8	24	
	1	2	4	12	$38 = b_1$	
2		2	4	16		
	1	2	8	$28 = b_2$		
2		2	8			
	1	4	$16 = b_3$			
2		2				
	1	$6 = b_4$				
	b_5					

Así pues el desarrollo pedido es:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-2) + b_2(x-2)^2 + b_3(x-2)^3 + b_4(x-2)^4 + b_5(x-2)^5$$

es decir:

$$f(x) = 23 + 38(x-2) + 28(x-2)^2 + 16(x-2)^3 + 6(x-2)^4 + (x-2)^5$$

2 *Desarrollar el polinomio $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ en potencias enteras y positivas de $x + 1$.*

SOLUCION

El desarrollo es de la forma:

$$f(x) = b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1)^3$$

y los coeficientes son los restos de las sucesivas divisiones de f(x) por $x + 1$.

Una vez efectuadas se obtiene el siguiente desarrollo:

$$f(x) = -1 + 8(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^4$$

3 *Calcular el polinomio de Taylor de grado 4 para la función $x^5 - 1$ en el punto $x= 2$.*

SOLUCION

El polinomio de Taylor de grado 4 es de la forma:

$$P^{x^5+1}_{4.2} = a_0 + a_1\,(x-2) + a_2\,(x-2)^2 + a_3\,(x-2)^3 + a_4\,(x-2)^4$$

donde

$$a_k = \frac{f^{(k)}(2)}{k!} \qquad 0 \leqslant k \leqslant 4$$

Por tanto, se tiene:

$$f(x) = x^5 - 1 \quad \Rightarrow \quad a_0 = f(2) = 31$$

$$f'(x) = 5\,x^4 \quad \Rightarrow \quad a_1 = f'(2) = 80$$

$$f''(x) = 20\,x^3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(2)}{2!} = 80$$

$$f'''(x) = 60\,x^2 \quad \Rightarrow \quad a_3 = \frac{f'''(2)}{3!} = 40$$

$$f^{IV}(x) = 120\,x \quad \Rightarrow \quad a_4 = \frac{f^{IV}(2)}{4!} = 10$$

Así pues, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P^{x^5+1}_{4.2} = 31 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4$$

4 *Calcular el polinomio de Taylor de grado 5 para la función $f(x) = e^x$ en el punto $x = 0$.*

SOLUCION

Los coeficientes del polinomio de Taylor serán de la forma:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \qquad 0 \leqslant k \leqslant 5$$

Por ser el valor de la función e^x ,y de todas sus derivadas en $x = 0$,igual a 1, los coeficientes se reducen a:

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

Así pues, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P^{e^x}_{5\cdot 0} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

5 *Demostrar que si x es positivo se tiene:* $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16}$

SOLUCION

El desarrollo de Mac Laurin de $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ hasta el término x^4 será:

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{-\frac{2}{3^2}}{2!}x^2 + \frac{\frac{10}{3^3}}{3!}x^3 + \frac{-\frac{80}{3^4\,\sqrt[3]{(1+x)^{11}}}}{4!}x^4$$

o bien

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{3^4} + \frac{10}{3^5\,\sqrt[3]{(1+t)^{11}}}x^4 \qquad 0 < t < x$$

teniendo en cuenta, para obtenerlo, los valores de $f(x)$ y sus derivadas en $x = 0$.

Como x es positivo y $t \in (0, x)$ el término:

$$\frac{10}{3^5\,\sqrt[3]{(1+t)^{11}}}x^4$$

es siempre positivo. Por tanto, al suprimir dicho término se verifica:

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{3^4}$$

Como, además, $\frac{5}{3^4}$ es menor que $\frac{1}{16}$, será $\frac{5x^3}{3^4} < \frac{1}{16}$ y en consecuencia:

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16}$$

que es lo que se quería demostrar.

6 *Desarrollar la función $f(x) = e^x$ en potencias del binomio $x + 1$, hasta el término que contenga $(x + 1)^3$.*

SOLUCION

El desarrollo de la función $f(x)$ en potencias de $x + 1$ es el desarrollo de Taylor de la función en el punto $c = -1$. Este desarrollo será, pues, de la forma:

$$f(x) = f(-1) + \frac{f'(-1)}{1!}(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + R_3(x)$$

Dado que e^x y todas sus derivadas toman el valor $\frac{1}{e}$ en $x = -1$, se tiene:

$$e^x = \frac{1}{e} + \frac{\frac{1}{e}}{1!}(x+1) + \frac{\frac{1}{e}}{2!}(x+1)^2 + \frac{\frac{1}{e}}{3!}(x+1)^3 + R_3(x)$$

o bien

$$e^x = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{x+1}{1!} + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!}\right) + R_3(x)$$

7 *Desarrollar la función $f(x) = Ln\,x$ en potencias de $x-1$, hasta el término con $(x-1)^2$.*

SOLUCION

El desarrollo pedido será el de Taylor en el punto $c = 1$, que será de la forma:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + R_2(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$f(x) = Lnx \Rightarrow f(1) = 0 \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \quad , \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

se tiene:

$$Ln\, x = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} + R_2(x)$$

8 *Demostrar que la diferencia entre* $sen(a+h)$ *y* $sena + h\cos a$ *no es mayor de* $\frac{1}{2}h^2$.

SOLUCION

El desarrollo de Taylor de $f(x) = senx$ en el punto $c = a$ es:

$$sen\, x = sen\, a + \frac{\cos a}{1!}(x-a) - \frac{sen\, t}{2!}(x-a)^2 \qquad a < t < x$$

donde se ha tomado el término complementario de Lagrange.

Llamando h a la diferencia $x - a$, resulta $x = a + h$, y se puede escribir:

$$sen\,(a+h) = sen\, a + h\cos a - \frac{sent}{2!}h^2 \qquad a < t < a + h$$

de donde resulta:

$$sen(a+h) - (sen\, a + h\cos a) = -\frac{sent}{2!}h^2 \Rightarrow |sen(a+h) - (sen\, a + h\cos a)| = |sent|\frac{h^2}{2}$$

y, teniendo en cuenta que $|sen\, t| = 1$, resulta finalmente:

$$|sen\,(a+h) - (sen\, a + h\cos a)| < \frac{1}{2}h^2$$

desigualdad de la que se deduce lo que se quería demostrar.

9 *Hallar el término complementario (de Lagrange) de grado 4 en el desarrollo de la función* $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *en el entorno del punto* $x = 2$.

SOLUCION

Dicho término complementario será de la forma:

$$R_4(x) = \frac{f^{V}(t)}{5!}(x-2)^5 \qquad con \quad 2 < t < x$$

La quinta derivada de la función dada es:

$$f^{V}(x) = \frac{-120}{(x-1)^6}$$

En consecuencia resulta:

$$R_4(x) = \frac{\dfrac{-120}{(t-1)^6}}{5!}(x-2)^5 \qquad \text{es decir} \qquad R_4(x) = \frac{1}{(t-1)^6}(x-2)^5$$

10 *Desarrollar por la fórmula de Mac-Laurin la función* $f(x) = Ln(x^2-3x+2)$

SOLUCION

El desarrollo es de la forma:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Teniendo en cuenta que:

$$f(0) = \text{Ln } 2 \quad , \quad f'(0) = \frac{-3}{2} \quad , \quad f''(0) = \frac{-7}{4} \quad , \quad f'''(0) = \frac{-9}{4}, \ldots\ldots$$

el desarrollo pedido será de la forma:

$$\text{Ln}(x^2-3x+2) = \text{Ln}2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2!}\cdot\frac{7}{4}x^2 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{9}{4}x^3 + \ldots =$$

$$= \text{Ln}2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{8}x^2 - \frac{3}{8}x^3 + \ldots$$

11 *Escribir los seis primeros términos del desarrollo de Mac-Laurin de la función:*

$$f(x) = Ln \quad tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

SOLUCION

Las cinco primeras derivadas de la función, y sus valores para $x = 0$, serán:

$$f(x) = \text{Ln} \quad \text{tag}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad f(0) = \text{Ln}\left(\text{tg}\frac{\pi}{4}\right) = \text{Ln } 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)}\cdot\dfrac{1}{2}}{\text{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\,\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\text{sen } 2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{\text{tg } x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{1}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0) = 1$$

$$f^{IV}(x) = \frac{-3\operatorname{sen} x - \cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\cos^4 x} \qquad \Rightarrow \qquad f^{IV}(0) = -1$$

$$f^{V}(x) = \frac{-3\cos x + 3\cos^2 x \operatorname{sen} x + 2(2\operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x) + (-3\operatorname{sen} x - \cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos x).}{\cos^8 x}$$

$$\frac{.\,4\cos^3 x \operatorname{sen} x}{\cos^8 x} \qquad \Rightarrow \qquad f^{V}(0) = -3$$

Por tanto el desarrollo pedido es:

$$\operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} - \frac{3\,x^5}{5!} + R_5(x)$$

12 *Escribir los tres primeros términos del desarrollo por la fórmula de Taylor de la función:*

$f(x) = \dfrac{x \,.\, Ln\, x}{x^2 - 1}$ *en el entorno de $x = 1$.*

SOLUCION

No es posible escribir dicho desarrollo pues la función es discontinua en $x = 1$.

13 *Determinar los intervalos de concavidad de las funciones:*

a) $f(x) = x^2 - x^4$

SOLUCION

Condición de concavidad: $f''(t) > 0$

$f(x) = x^2 - x^4$, $f'(x) = 2x - 4x^3$, $f''(x) = 2 - 12\,x^2$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{12} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$f''(x) = -12\,x^2 + 2 = -12\left(x - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Así pues:

$$x < -\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ convexa}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad \Rightarrow \quad f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ cóncava}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6}} < x \qquad \Rightarrow \quad f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ convexa}$$

En consecuencia, la función $f(x) = x^2 - x^4$ es cóncava en el intervalo:

$$\left\{x \in R \mid -\frac{1}{\sqrt{6}} < x < \frac{1}{\sqrt{6}}\right\} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

b) $f(x) = \dfrac{8(x-1)^2}{x^3}$

SOLUCION

$$f''(x) = \frac{8(2x^2 - 12x + 12)}{x^5}$$

cuyo signo es el de :

$$(x^2 - 6x + 6) \cdot x^5 = x - (3+\sqrt{3}) \quad x - (3-\sqrt{3}) \quad \cdot x^5$$

$x < 0$	$\Rightarrow$	$f''(x) < 0$	$\Rightarrow$	f(x) convexa
$0 < x < 3-\sqrt{3}$	$\Rightarrow$	$f''(x) > 0$	$\Rightarrow$	f(x) cóncava
$3-\sqrt{3} < x < 3+\sqrt{3}$	$\Rightarrow$	$f''(x) < 0$	$\Rightarrow$	f(x) convexa

Por tanto, la función dada es cóncava en el intervalo $(0, 3-\sqrt{3})$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

SOLUCION

$$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1) = 4 \cdot e^{-x^2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) = 4 \cdot e^{-x^2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

cuyo signo, por ser $4 \cdot e^{-x^2} > 0$, vendrá dado por el signo del producto

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

que es positivo cuando $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

En consecuencia, la función dada será cóncava en los intervalos:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad y \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$$

14 *Determinar los puntos de inflexión de las funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

SOLUCION

p es punto de inflexión de f(x) si:

$$f''(p) = f'''(p) = \ldots\ldots = f^{n}(p) = 0 \quad y \quad f^{n+1}(p) \neq 0$$

siendo n par.

En particular, p es punto de inflexión si $f''(p) = 0$ y $f'''(p) \neq 0$.

Tenemos:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2} \quad ; \quad f'(x)=\frac{(x^2+2)-x\,.\,2x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x(x^2+2)^2-(2-x^2).2.(x^2+2).2x}{(x^2+2)^4}=\frac{-2x(3x^2-2)}{(x^2+2)^3}=\frac{-6x\,(x^2-\frac{2}{3})}{(x^2+2)^3}$$

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow x=-6x(x^2-\frac{2}{3})=0 \quad \Rightarrow \quad x=0\ ,\ x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ ,\quad x=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Por otra parte es:

$$f'''(x)=-6\,\frac{(3x^2-\frac{2}{3})(x^2+2)^3-\quad x(x^2-\frac{2}{3})\quad .\,3(x^2+2).\,2x}{(x^2+2)^6}$$

de donde:

$x=0 \quad \Rightarrow \quad f'''(0)\neq 0$ es punto de inflexión.

$x=-\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f'''(-\frac{2}{3})\neq 0$ es punto de inflexión.

$x=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f'''(\frac{2}{3})\neq 0$ es punto de inflexión.

b) $f(x)=x\,.\,\mathrm{sen}\,x$

SOLUCION

$f'(x)=\mathrm{sen}\,x+x\cos x$

$f''(x)=\cos x+\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x\ =\ 2\,\mathrm{eos}\,x-x\,\mathrm{sen}\,x$

La ecuación $2\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x=0$ no puede resolverse con los conocimientos del alumno del Curso de Orientación, por lo que no es posible hallar los puntos de inflexión.

c) $f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$

SOLUCION

$$f''(x)=\frac{-2(x-1)^3-(1-2x).3.(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(x-1)^2\quad -2(x-1)-3(1-2x)}{(x-1)^6}=\frac{4x-1}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad 4x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{4}$$

Tenemos:

$$f'''(x)=\frac{-12\,x}{(x-1)^5}$$

y como $f'''(\frac{1}{4})\neq 0$, el punto $x=\frac{1}{4}$ es de inflexión.

d) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

SOLUCION

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(x+2)^{-4/3} \quad ; \quad f''(x) = (-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(x+2)^{-7/3}$$

f(x) no tiene puntos de inflexión, pues $f''(x) \neq 0$ para todo x.

15 *Hallar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

SOLUCION

Para hallar dichos intervalos y los puntos de inflexión se ha de estudiar la segunda derivada f"(x). Los puntos en que es positiva son de concavidad, aquellos en que es negativa son de convexidad y los que la anulan los posibles puntos de inflexión.

Tenemos:

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

y por tanto:

si $x > 2$ $\Rightarrow$ $f''(x) > 0$ $\Rightarrow$ Hay concavidad para $x > 2$

si $x < 2$ $\Rightarrow$ $f''(x) < 0$ $\Rightarrow$ Hay convexidad para $x < 2$

si $x = 2$ $\Rightarrow$ $f''(x) = 0$ Como $f'''(x) \neq 0$ hay inflexión en $x = 2$

b) $f(x) = \cos x$

SOLUCION

$$f''(x) = -\cos x \quad , \quad f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \in Z$$

como

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \quad y \quad f'''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \begin{cases} +1 & si \quad k = 2p \\ -1 & si \quad k = 2p+1 \end{cases} \qquad p \in Z$$

todos los puntos que anulan la segunda derivada son de inflexión.

Por otra parte, del estudio del signo de la segunda derivada se obtiene:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow -\cos x > 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

por lo que la función será cóncava en todos estos invervalos.

Analogamente, será convexa para los intervalos :

$$f''(x) < 0 \Rightarrow -\cos x < 0 \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

c) $f(x) = (x+1)^4$

SOLUCION

$$f''(x) = 12(x+1)^2 \quad , \quad f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

No se puede asegurar que en $x = -1$ haya inflexión pues también $f'''(-1) = 0$.

Por otra parte, como $f''(x) > 0$, la función es cóncava para todo x y no tiene puntos de inflexión.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

SOLUCION

$$f''(x) = \frac{2}{(x+3)^3}$$

Como $f''(x) \neq 0$, para todo x, f(x) no tiene puntos de inflexión.

Por otra parte:

para $x > -3 \quad \Rightarrow \quad 2(x+3)^3 > 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) > 0$ concavidad.

para $x < -3 \quad \Rightarrow \quad 2(x+3)^3 < 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) < 0$ convexidad.

e) $f(x) = x^2 \,.\, Ln\, x$

SOLUCION

$f''(x) = 2\,(Ln\, x + 1) + 1 \quad = \quad 2\, Ln\, x + 3ç$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ln\, x = -\dfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}} = (x_0)$

Como $f'''(x) = \dfrac{2}{x}$ es $f'''(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}) \neq 0$ hay inflexión en dicho punto.

$x < \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$ concavidad, pues $f''(x)$ es creciente por ser $f'''(x)$ positiva y ser $f(x_0)=0$

de donde $f''(x) < 0$ para $x \in (0\,,\, x_0)$.

Por el mismo razonamiento es $f''(x) > 0$ para $x \in (x_0\,,\, +\infty)$ y por tanto f(x) será convexa en dicho intervalo.

f) $f(x) = (x^2 + 1)\, e^x$

SOLUCION

$f''(x) = e^x\,(x+1)\,(x+3)$

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$ en ambos hay inflexión.

$(-\infty\,, -3)$	concavidad
$(-3\,, -1)$	convexidad
$(-1, -\infty)$	concavidad

16 *Demostrar la desigualdad* $e^x > 1 + x$ *para* $x \neq 0$.

SOLUCION

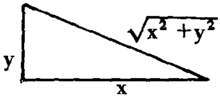
El desarrollo de Mac Laurin de la función $f(x) = e^x$ es:

$$e^x = 1 + x + \frac{e^t}{2!}\, x^2$$

de donde resulta lo deseado al ser el término complementario positivo si $x \neq 0$.

17 *¿ Cuál de los triángulos rectángulos de perímetro dado igual a 2p tiene mayor área?*

SOLUCION



$$S = \frac{1}{2}\, x \cdot y \qquad (1)$$

$$2p = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

Despejando en (2) uno de los lados, por ejemplo, y , se obtiene:

$$y = \frac{2p\,(x-p)}{x-2p}$$

y sustituyendo en (1) tenemos: $S = \dfrac{p\; x\,(x-p)}{x-2p}$

Tenemos que hallar el valor de x que hace máxima esta función.

$$S'(x) = \frac{p\,(x^2 - 4px + 2p^2)}{(x-2p)^2}$$

$$S'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4px + 2p^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = p\,(2 \pm \sqrt{2})$$

como

$$S''(x) = p\;\frac{2(x-2p)^2 - (x^2 - 4px + 2p^2).\,2}{(x-2p)^3}$$

$$S''(\,p(2+\sqrt{2})\,) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{mìnimo}$$

$$S''(\,p(2-\sqrt{2})\,) < 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{máximo}$$

Así pues, el triángulo rectángulo de perímetro 2p y área máxima es aquel tal que:

$x = 2p - \sqrt{2}\;p$ e

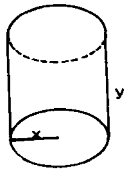
$$y = \frac{2p(x-p)}{x-2p} = (\text{sustituyendo x por su valor}) = (2-\sqrt{2}\,)\,p$$

o sea, un triángulo rectángulo isósceles.

18 *¿ Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total ?*

SOLUCION

Sea x el radio de la base del cilindro.
Sea y la altura (generatriz) de dicho cilindro.



Area total del cilindro:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xy \qquad (1)$$

Volumen del cilindro:

$$V = \pi x^2 y \qquad (2)$$

Despejando y en (2) y sustituyedno en (1) se obtiene:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$$

Esta es la función que hay que minimar. Se tiene:

$$S'(x) = 4\pi x - \frac{2V}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi x = \frac{2V}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^3 = \frac{2V}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$S''(x) = 4\pi + \frac{4V}{x^3} \quad \Rightarrow \quad S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 12\pi > 0$$

Así pues, para dicho valor de x la superficie total es mínima.

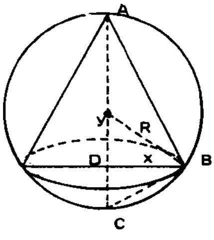
Las dimensiones (radio y altura) de dicho cilindro resultan ser:

$$x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad y = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

es decir, $y = 2x$.

19 *Inscribir en una esfera un cono de volumen máximo.*

SOLUCION



Sea x el radio de la base del cono.
Sea y su altura.

Volumen del cono

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y \qquad (1)$$

Sea R el radio de la esfera.

Por el teorema de la altura en el triángulo rectángulo ABC, se tiene

$$x^2 = y\,(2R - y) \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$V = \frac{2}{3} R y^2 - \frac{y^3}{3}$$

siendo esta la función a maximar.

$$V'(y) = \frac{4}{3} Ry - y^2$$

$$V'(y) = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{4R}{3} \end{cases}$$

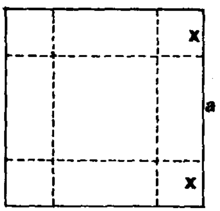
$$V''(y) = \frac{4}{3} R - 2y \qquad , \quad V''(\frac{4R}{3}) < 0 \qquad \text{máximo}$$

Siendo las dimensiones de dicho cono de volumen máximo:

radio de la base $= \dfrac{2\sqrt{2}}{3} R$ altura del cono $= \dfrac{4R}{3}$

20 ***De una hoja de cartón cuadrada, de lado a, hay que hacer una caja rectangular abierta, que tenga la mayor capacidad posible, recortando para ello cuadrados en los ángulos de la hoja y después doblando los salientes de la figura en forma de cruz así obtenida.***

SOLUCION



Sea x el lado del cuadrado que se recorta en los ángulos

La caja es un paralelepípedo de base un cuadrado de lado $a - 2x$ y altura x.

Su volumén será:

$$V = (a - 2x)^2\, x = a^2 x + 4x^3 - 4ax^2$$

$$V'(x) = a^2 + 12\,x^2 - 8ax$$

$$V'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{6} \end{cases}$$

$$V''(x) = 24x - 8a$$

Como $\qquad V''(\dfrac{a}{2}) = 4a > 0$

$$V''(\frac{a}{6}) = -4a < 0$$

el valor máximo vendrá dado cuando $x = \dfrac{a}{6}$

Así pues hay que recortar cuadrado de lado $\dfrac{a}{6}$.

CAPITULO XII

Estudio y representación de curvas explícitas

1 *Hallar el campo de existencia de las gráficas de las siguientes funciones:*

a) $f(x)=x^2+1$, *b)* $f(x)=\sqrt{x-1}$, *c)* $f(x)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$

d) $f(x)=\sqrt{(x-2)(x-1)}$, *e)* $f(x)=Ln\,(x+1)$, *f)* $f(x)=3^x$

g) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$, *h)* $f(x)=Ln\,\dfrac{x}{x^2+1}$

SOLUCION

a) El campo de existencia es R.

b) $(x-1)\geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x\geqslant 1$

c) Como el índice de la raiz es impar el campo de existencia es R.

d) $(x-2)(x-1)\geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad x\geqslant 2$ y $x\leqslant 1$ y por tanto el campo de existencia será: $(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$.

e) $x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1$

f) El campo de existencia es R.

g) El campo de existencia es $R-\{1\}$.

h) $\dfrac{x}{x^2+1}>0 \quad \Rightarrow \quad x>0$

2 *Hallar las simetrías de las gráficas de las funciones:*

a) $f(x)=x^2+x+1$, *b)* $f(x)=(x+1)^2$, *c)* $f(x)=\dfrac{x^3-1}{2}$

SOLUCION

a) Dado que $f(-x)=x^2-x+1$ la gráfica no presentará simetrías.

b) Dado que $f(-x)=(-x+1)^2=x^2-2x+1$ la gráfica no presentará simetrías.

c) Dado que $f(-x)=\dfrac{-x^3-1}{2}$ la gráfica no presentará simetrías.

3 *Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión de las gráficas de las funciones:*

a) $f(x)=x^3+x^2+x+1$, *b)* $f(x)=\text{sen}\,x$, *c)* $f(x)=\sqrt{x+1}$

SOLUCION

a) Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos considerar el signo de la primera deirvada de la función.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow f'(x) = (x - \frac{-1+\sqrt{2}}{3})(x - \frac{-1-\sqrt{2}}{3})$$

de donde

$$x > \frac{-1+\sqrt{2}}{3} \qquad \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{creciente}$$

$$\frac{-1-\sqrt{2}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{3} \qquad \Rightarrow f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decreciente}$$

$$\frac{-1-\sqrt{2}}{3} > x \qquad \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{creciente}$$

Para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad debemos considerar el signo de la segunda derivada de la función.

$$f''(x) = 6x + 2$$

$$x > -3 \qquad \Rightarrow f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{concavidad}$$

$$x < -3 \qquad \Rightarrow f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{convexidad}$$

En $x = -3$, como $f'''(x) = 2 \neq 0$, habrá un punto de inflexión.

b) $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$

Analizando los signos de las mismas obtenemos:

$$0 + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{y} \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \quad \text{creciente}$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{decreciente.}$$

$$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \qquad \text{concavidad}$$

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \qquad \text{convexidad}$$

En los valores que anulan la segunda derivada, $x = 2k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$, hay inflexión.

c) $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2}$

Como $f'(x)$ es siempre positiva, la función es creciente en los puntos en que está definida.

Como $f''(x)$ es siempre negativa, la función es siempre convexa.

No existen puntos de inflexión.

4 *Hallar las asíntotas de las gráficas de las funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, *b)* $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, *c)* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

SOLUCION

a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$ es asíntota horizontal

$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 1$ es asíntota vertical

$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = -1$ es asíntota vertical.

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal.

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to -1} f(x) = \infty \Rightarrow \quad x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales.

Veamos si existirá asíntota inclinada:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad , \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - x\right) = -1$$

y por tanto la recta $y = x - 1$ será asíntota inclinada.

c) $y = 0$ es asíntota horizontal.

$x = 1$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

5 *Estudiar y representar gráficamente las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

SOLUCION

a) Dominio : R

b) Simetrías: no tiene

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \qquad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{6}$

$\left(-\infty, \dfrac{6 - \sqrt{12}}{6}\right)$ creciente , $\left(\dfrac{6 - \sqrt{12}}{6}, \dfrac{6 + \sqrt{12}}{6}\right)$ decreciente, $\left(\dfrac{6 + \sqrt{12}}{6}, +\infty\right)$ creciente.

d) Máximos y mínimos.

$x = \dfrac{6 + \sqrt{12}}{6}$ mínimo , $x = \dfrac{6 - \sqrt{12}}{6}$ máximo

e) Concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

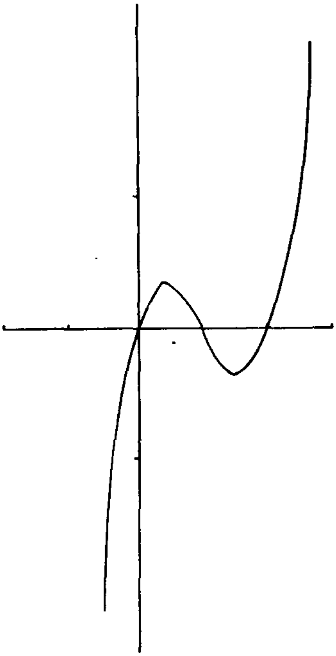
$f''(x) = 6x - 6$

$(-\infty, 1)$ convexidad, $(1, +\infty)$ concavidad , $x = 1$ punto de inflexión.

f) Asíntotas: No tiene

g) Puntos de intersección con los ejes.

$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad ; \quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = 2$



b) $f(x) = x^2 - x^4$

SOLUCION

a) Dominio R.

b) Simétrica respecto al eje de ordenadas

c) $f'(x) = 2x - 4x^3 \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ , \ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ creciente, $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ decreciente, $(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ creciente, $(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ decreciente

d) $x = 0$ mínimo , $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ máximo.

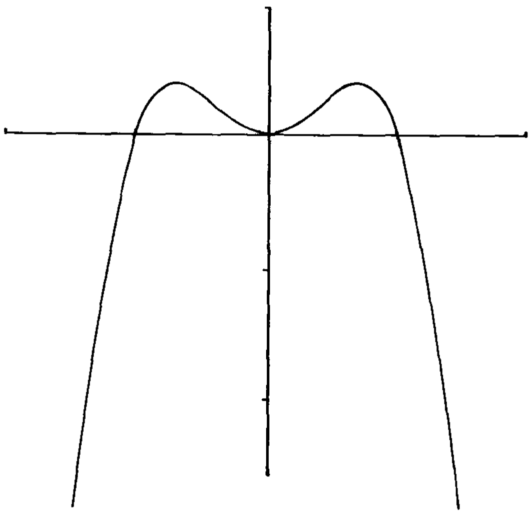
e) $f''(x) = 2 - 12\,x^2$

$(-\infty, -\sqrt{\dfrac{2}{12}})$ convexidad , $(-\sqrt{\dfrac{2}{12}}, \sqrt{\dfrac{2}{12}})$ concavidad, $(\sqrt{\dfrac{2}{12}}, +\infty)$ convexidad

$x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{12}}$ puntos de inflexión.

f) Asíntotas: No tiene.

g) Puntos de intersección con los ejes: $(0\,,0)\,,(1\,,0)\,,(-1\,,0)$



c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$

SOLUCION

a) Dominio $R - \{1\,,4\}$.

b) No tiene simetrías.

c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

$(-\infty, -2)$ decreciente, $(-2, 2)$ creciente, $(2\,, +\infty)$ decreciente

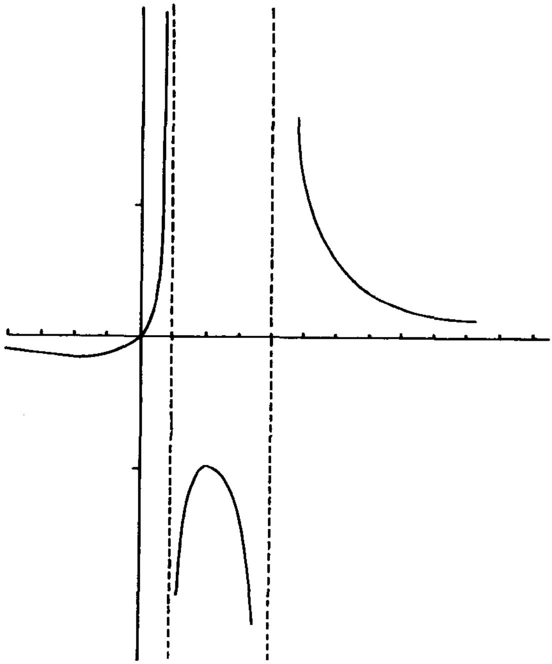
d) $x = 2$ máximo , $x = -2$ mínimo.

e) $f''(x) = \dfrac{2x^3 - 24x + 40}{(x^2 - 5x + 4)^3}$

$(-\infty, -4'107)$ cóncava , $(-4'107, +\infty)$ convexa , $x = -4'107$ punto de inflexión.

f) El eje de abscisas es asíntota horizontal.
las rectas $x = 1$, $x = 4$ son asíntotas verticales.

g) La gráfica corta a los ejes en el punto $(0\,,0)$.



d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

SOLUCION

a) Dominio $R-\{-1,1\}$.

b) Simétrica respecto al origen de coordenadas.

c) $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$ $\qquad f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

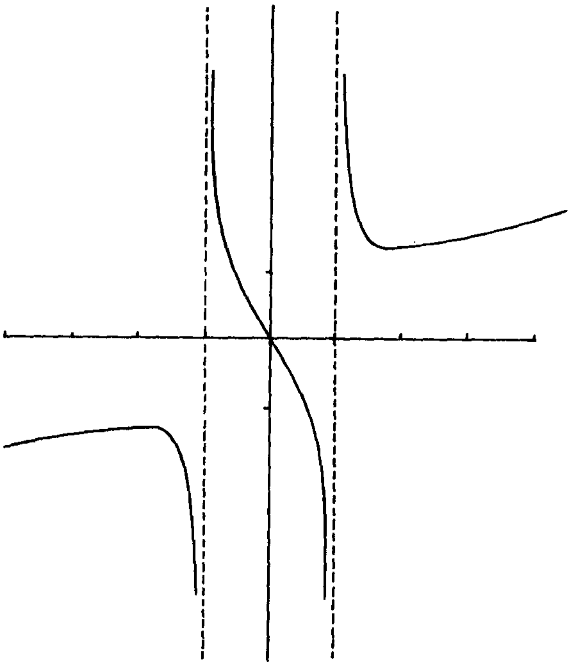
$(-\infty,-\sqrt{3})$ creciente , $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ decreciente , $(\sqrt{3},+\infty)$ creciente

d) $x=\sqrt{3}$ mínimo , $x=-\sqrt{3}$ máximo .

e) Dada la complejidad de la segunda derivada debe renunciarse al cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad.

f) Las rectas $x=1$, $x=-1$ son asíntotas verticales.

g) No tiene puntos de corte con los ejes.



e) $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

SOLUCION

a) Dominio $R - \{-1\}$.

b) No tiene simetrías.

c) $f'(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2}{(1+x)^3}$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = -3$

$(-\infty, -3)$ decreciente , $(-3, +\infty)$ creciente

d) $x = -3$ máximo.

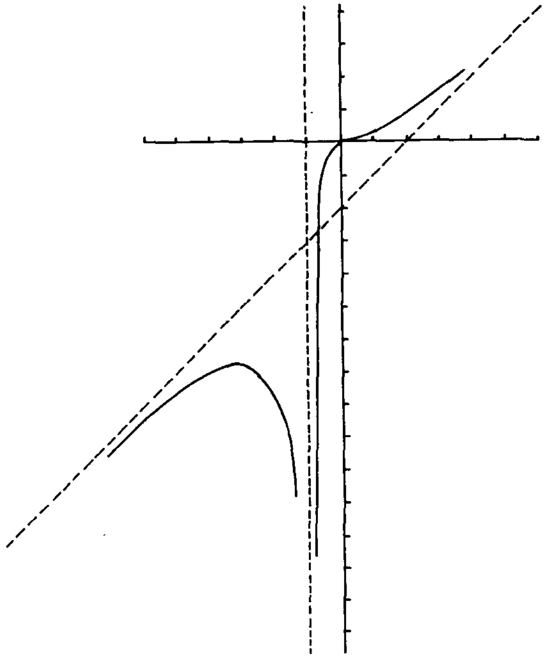
e) $f''(x) = \dfrac{6x}{(1+x)^4}$

$(-\infty, 0)$ convexidad , $(0, +\infty)$ concavidad , $x = 0$ punto de inflexión.

f) La recta $x = -1$ es asíntota vertical.

La recta $y = x - 2$ es asíntota inclinada.

g) La gráfica corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.



f) $f(x) = \sqrt{(x+3)(x^2-1)}$

SOLUCION

a) Dominio $D = [-3, -1\,] \cup [\,1\,, +\infty)$

b) No tiene simetrías.

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 1}{2\sqrt{(x+3)(x^2-1)}}$ $\quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{48}}{6}$

$(-\infty, \dfrac{-6-\sqrt{48}}{6}) \cap D$ creciente , $(\dfrac{-6-\sqrt{48}}{6}, \dfrac{-6+\sqrt{48}}{6}) \cap D$ decreciente

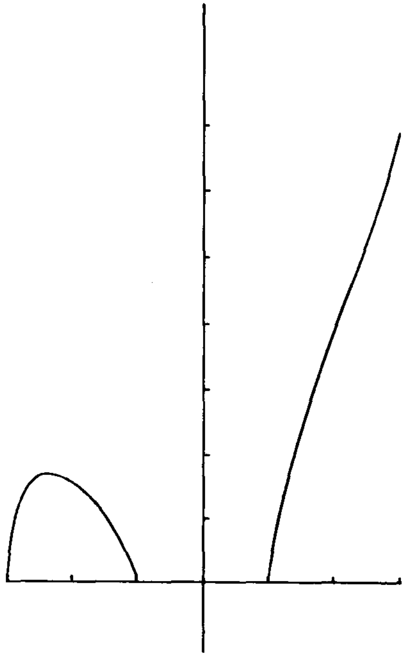
$(\dfrac{-6+\sqrt{48}}{6}, +\infty) \cap D$ creciente.

d) $x = \dfrac{-6-\sqrt{48}}{6}$ máximo.

e) Dada la complejidad de la segunda derivada debe renunciarse al cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad.

f) No tiene asíntotas.

g) Corta a los ejes en los puntos $(-3, 0)$, $(-1, 0)$ y $(1\,, 0)$.



g) $f(x) = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$

SOLUCION

a) Dominio $R - \{2\}$.

b) No tiene simetrías.

c) $f'(x) = \dfrac{16 - 4x}{(x-2)^3}$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$

$(-\infty, 2)$ decreciente , $(2, 4)$ creciente , $(4, +\infty)$ decreciente .

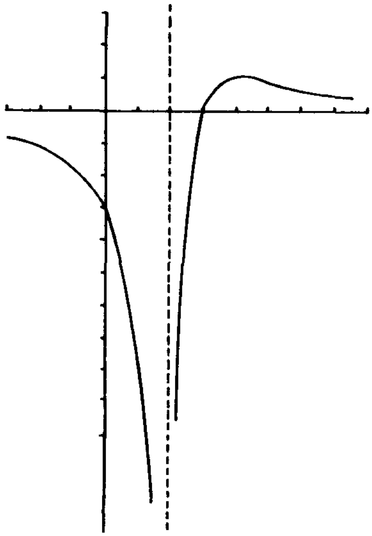
d) $x = 4$ máximo.

e) $f''(x) = \dfrac{-8}{(x-2)^4}$

Es siempre convexa y no presenta puntos de inflexión.

f) El eje de abscisas es asíntota horizontal.
La recta $x = 2$ es asíntota vertical.

g) Corta a los ejes en los puntos $(0, -3)$ y $(3, 0)$.



h) $f(x) = \dfrac{8}{x\,\sqrt[3]{(x^2-4)}}$

SOLUCION

a) Dominio $R - \{0, 2, -2\}$.

b) Es simétrica respecto al origen.

c) $f'(x) = \dfrac{-8\,(5x^2-12)}{3x^2\,\sqrt[3]{(x^2-4)^4}}$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{12}{5}}$

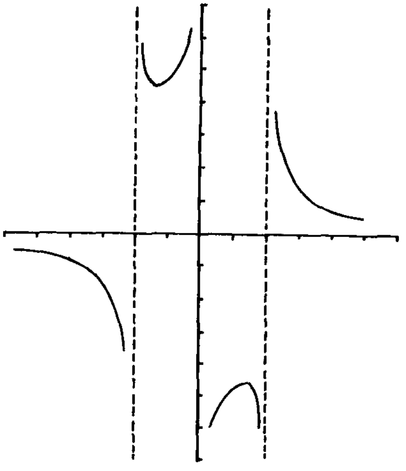
$(-\infty, -\sqrt{\dfrac{12}{5}})$ decreciente, $(-\sqrt{\dfrac{12}{5}}, \sqrt{\dfrac{12}{5}})$ creciente $(\sqrt{\dfrac{12}{5}}, +\infty)$ decreciente

d) $x = +\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ máximo , $x = -\sqrt{\dfrac{12}{5}}$ mínimo.

e) Dada la complejidad de la segunda derivada debe renunciarse al cálculo de los intervalos de concavidad y convexidad.

f) El eje de abscisas es asíntota horizontal.
Las rectas $x = 0$, $x = -2$, $x = 2$ son asíntotas verticales.

g) No corta a los ejes.



i) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

SOLUCION

a) Dominio $R - \{0\}$.

b) No tiene simetrías.

c) $f'(x) = \dfrac{2x^3 - 2}{x^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

$(-\infty, 1)$ decreciente , $(1, +\infty)$ creciente.

d) $x = 1$ mínimo.

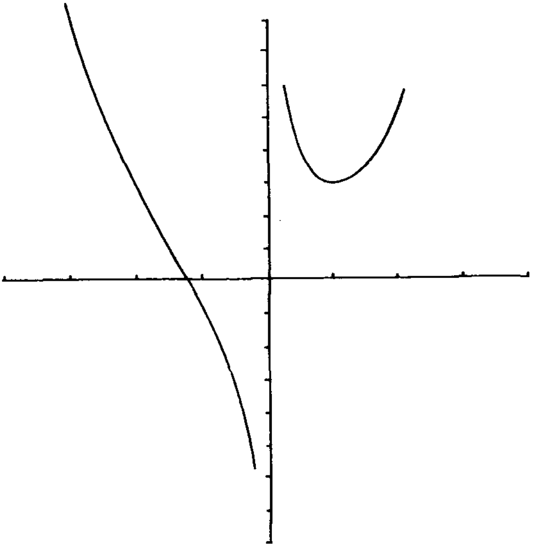
e) $f''(x) = \dfrac{2x^3 + 4}{x^3}$

$(-\infty, \sqrt[3]{-2})$ concavidad, $(\sqrt[3]{-2}, 0)$ convexidad , $(0, +\infty)$ concavidad

$x = \sqrt[3]{-2}$ punto de inflexión.

f) La recta $x = 0$ es asíntota vertical.

g) Corta a los ejes en el punto $x = \sqrt[3]{-2}$ (punto de inflexión).



CAPITULO XIII

Separación y aproximación de raíces reales de ecuaciones algebraicas

1 *Indicar, en cada caso, una ecuación algebraica cuyas raíces sean :*

a)	$2,\ -2,\ 1,\ 0$	*d)*	-1 *(triple)*, 2 *(doble)*, 5
b)	$3,\ -2,\ -1,\ -3$	*e)*	$3,\ i\ ,-i\ ,\ 2$
c)	$2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ \frac{4}{3}$	*f)*	$1,\ 2,\ 2+i,\ 2-i$

SOLUCION

a) Teniendo en cuenta que si una ecuación algebraica tiene el valor a como raiz la ecuación es divisible por $x - a$ una ecuación algebraica cuyas raíces sean 2,–2,1 y 0 debe ser divisible por $(x - 2)$,$(x + 2)$, $(x - 1)$ y $(x - 0)$ por lo que todas las ecuaciones algebraicas con aquellas raíces serán de la forma:

$$(x - 2).(x + 2).(x - 1).\ x\ .\ K = 0$$

donde $K \in R$ si las dadas deben ser las únicas raíces o bien K una ecuación algebraica si pueden existir otras raíces además de las dadas.

b) $(x - 3).(x + 2).(x + 1).(x + 3)\ .\ K = 0$

c) $(x - 2).(x - \frac{1}{2}).(x + 1).(x - \frac{4}{3}).\ K = 0$

o bien

$(x - 2).(2x - 1).(x + 1).(3x - 4).\ K = 0$

d) $(x - 1)^3.(x - 2)^2.(x - 5).\ K = 0$

e) $(x - 3).(x - i).(x + i).(x - 2).\ K = 0$
o bien
$(x - 3).(x^2 + 1).(x - 2)\ .\ K = 0$

f) $(x - 1).(x - 2).(x - (2 + i)).(x - (2 - i))\ .\ K = 0$

o bien

$(x - 1).(x - 2).(x^2 - 4x + 1).\ K = 0$

2 *Dadas las siguientes ecuaciones algebraicas, calcular el orden de multiplicidad de las raíces múltiples, utilizando el teorema 2.2.*

a)	$x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 7x - 2$	*raíz* $x = -1$
b)	$x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24$	*raíz* $x = 2$
c)	$x^8 + 7x^7 + 17x^6 + 16x^5 + 9x^4 + 24x^3 + 40x^2 + 32x + 16$	*raíz* $x = -2$

SOLUCION

a) Dada la ecuación algebraica

$$P(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 7x + 2 = 0$$

se tiene $P(-1) = 0$. Calculemos el polinomio primera derivada:

$$P'(x) = 5x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 16x - 7$$

Como $P'(-1) \neq 0$ resulta que -1 es una raíz simple, o de multiplicidad 1.

b) $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24$ $\qquad P(2) = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 28$ $\qquad P'(2) = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 18x - 12$ $\qquad P''(2) = 0$

$P'''(x) = 24x - 18$ $\qquad P'''(2) \neq 0$

Por tanto el orden de multiplicidad es 3.

c) El orden de multiplicidad es 2.

3 *Determinar las raíces enteras y fraccionarias de las ecuaciones:*

a) $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$

b) $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$

c) $x^4 - x^3 - 11x^2 - 199x - 812 = 0$

d) $x^5 + 3x^4 - 23x^3 - 51x^2 + 9x + 120 = 0$

e) $x^4 - 9x^2 + 11x - 2 = 0$

f) $x^4 + \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{13}{4}x^2 - \dfrac{53}{8}x + \dfrac{15}{4} = 0$

g) $96x^4 + 208x^3 + 90x^2 - 13x - 6 = 0$

h) $x^5 - 5x^4 - 23x^3 + 295x^2 - 824x + 700 = 0$

i) $6x^3 - 25x^2 + 3x + 4 = 0$

j) $x^4 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$

k) $9x^5 + 15x^4 - 50x^3 - 39x^2 + 63x - 98 = 0$

l) $x^3 - 7x - 6 = 0$

SOLUCION

a) Dada la ecuación $\qquad x^3 - 7x^2 + 36 = 0$

las posibles raices enteras son:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$$

que son los divisores del término independiente.

Se tiene: $P(1) = 30 \qquad P(-1) = 28$

lo que nos dice que ni 1 ni -1 son raíces de la ecuación, pero se tendrá:

$$P(1) = 30 = a - 1 \qquad \text{y} \qquad P(-1) = 28 = a + 1$$

si a es una raíz entera. Ello nos permite seleccionar como posibles raíces :

$$-2\ ,\quad 3,\quad 6$$

Se comprueba que $P(-2) = P(3) = P(6) = 0$ lo que nos permite afirmar que las raíces de la ecuación dada son:

$$-2,\quad 3,\quad 6.$$

b) Las únicas raíces enteras posibles serían ± 1 , pero $P(1) \neq 0$ y $P(-1) \neq 0$ y en consecuencia la ecuación no tiene raíces enteras.

Las posibles raíces fraccionarias serían $\pm\frac{1}{2}$.

Comprobemos si $\frac{1}{2}$ es una raíz:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Efectivamente, $\frac{1}{2}$ es una raíz. La ecuación podrá, pues, escribirse:

$$2.(x-\frac{1}{2}).(x^2+1) = 0$$

no existiendo otras raíces fraccionarias, pues x^2+1 carece de ellas.

d) No tiene raíces enteras ni fraccionarias.

e) La única raíz entera es 2.

f) Multiplicando la ecuación dada por 8 se obtiene:

$$8x^4+20x^3-26x^2-53x+30=0$$

que tiene como raíz entera $x=-2$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 8 & 20 & -26 & -53 & 30 \\ -2 & & -16 & -8 & 68 & -30 \\ \hline & 8 & 4 & -34 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

lo que nos permite descomponer la ecuación en:

$$(x+2).(8x^3+4x^2-34x+15) = 0$$

de modo que el segundo factor del primer miembro admite como posibles raíces fraccionarias:

$$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{3}{8}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{4}, \pm\frac{5}{8}, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{15}{4}, \pm\frac{15}{8}$$

Ensayando se obtiene:

$$\begin{array}{c|cccc} & 8 & 4 & -34 & 15 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 4 & -15 \\ \hline & 8 & 8 & -30 & \boxed{0} \end{array}$$

y resolviendo la ecuación $8x^2+8x-30 = 0$ se obtienen las raíces $\frac{3}{2}$ y $-\frac{5}{2}$.

g) Tiene como raíces: $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$.

h) 2 es raíz doble.

i) Sus raíces son: 4, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$

j) Su única raíz es 1 .

k) $-\dfrac{7}{3}$ es raíz doble.

l) Sus raíces son $-1, -2$ y 3 .

4 *Acotar, aislar y aproximar hasta las centésimas las raíces de las siguientes ecuaciones:*

a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

SOLUCION

Calculemos los polinomios primera y segunda derivada de la ecuación dada:

$$P'(x) = 3x^2 - 2$$

$$P''(x) = 6x$$

como para $K = 3$ se verifica:

$$P(3) > 0 \quad , \quad P'(3) > 0 \quad , \quad P''(3) > 0$$

3 es una cota superior de las raíces positivas de la ecuación.

Utilizando el polinomio $P(-\dfrac{1}{x})$, debidamente racionalizado:

$$5x^3 - 2x^2 + 1$$

tendremos que $P(-\dfrac{1}{x})$, $P'(-\dfrac{1}{x})$, $P''(-\dfrac{1}{x})$ son positivos para $x = 1$, por lo que $M = -1$ es una cota inferior de todas las raíces de la ecuación dada.

Por tanto las raíces estarán en el intervalo $[-1 , 3]$.

Utilizando el polinomio $P(\dfrac{1}{x})$ obtenemos que las raíces positivas están comprendidas entre 1 y 3.

Utilizando el polinomio $P(-x) = -x^3 + 2x - 5$, se obtiene :

$$P'(-x) = -3x^2 + 2$$

que al ser siempre negativa nos dice que no existe cota superior entera de las raíces negativas.

Por otra parte, por ser: $P(-1) = -4$
$P(\ 3) = 16$

entre ambos valores habrá un número impar de raíces.

Para aproximar las raíces se procederá a calcular valores como se indica a continuación.

x	P(x)
1	–6
2	–1
2’1	0’06
2’5	5’62
3	16

la raíz estará entre 2 y 2’1

2	–1
2’05	–0’48
2’08	–0’16

2'09	–0'05
2'1	0'06

la raíz estará entre 2'09 y 2'1.

2'09	–0'05
2'092	–0'03
2'094	–0'01
2'095	0'01
2'1	0'06

la raíz estará entre 2'094 y 2'095

Con aproximación hasta las centésimas la raíz será pues : 2'094.

b) $x^4 + 5x^2 + 7 = 0$

SOLUCION

La ecuación carece de raíces reales puesto que la cota superior de las raíces positivas , k = 1, coincide con la cota inferior de las mismas.

Por otra parte es evidente que los tres sumandos de la ecuación son positivos para todo valor que pueda adoptar la variable x.

c) $x^3 - 9x^2 + 23x - 14 = 0$

SOLUCION

Las raíces positivas están en el intervalo [0'5 , 5] y de forma más precisa en:

[0'5 , 1] [3 , 4] [4 , 5]

puesto que se tiene:

P(0) = –14	P(3) = 1	P(4) = – 2
P(1) = 1	P(4) = – 2	P(5) = 1

Aproximando sucesivamente se obtienen las raíces: 0'88 , 3'30 , 4'86 .

d) $x^3 + 3x^2 - 12x - 10 = 0$

SOLUCION

La ecuación dada tiene una raíz entera, x = 5, y podremos escribir:

$$x^3 + 3x^2 - 12x - 10 = (x - 5) . (x^2 - 2x - 2) = 0$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado obtendremos las restantes raíces que serán:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

cuyos valores, aproximando $\sqrt{3}$ por 1'73 , serán: 2'73 y –0'73.

e) $3x^3 + 5x - 40 = 0$

SOLUCION

Las raíces positivás están en [1 , 3] y su valor aproximado es 2'13.
No hay raíces negativas.

5 *Calcular con cinco cifras decimales exactas las raíces de la ecuación* $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

SOLUCION

Dada la ecuación $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ se procederá primero a acotar sus raíces.

3 es cota superior de todas las raíces positivas puesto que hace que todos los coeficientes y el resto de dividir el polinomio dado por $x - 3$ son positivos. Analogamente 0'5 es cota inferior de las raíces positivas. Por tanto las raíces positivas estarán en $[0'5 , 3]$.

-1 es cota superior de las raíces negativas y $-0'5$ es cota superior de las mismas por lo que estas estarán comprendidas en $[-1 , -0'5]$.

Por otra parte, el polinomio derivado: $3x^2 - 6x$ se anula para $x = 0$ y $x = 2$, y como $P(0) = 1$ y $P(2) = -3$ es posible afirmar que en el intervalo $[0'5 , 2]$ hay una raíz.

Finalmente y teniendo en cuenta los valores de $P(x)$ en los extremos de los intervalos citados:

$P(-1) = -3$
$P(-0'5) = 0'125$
$P(0'5) = 0'375$
$P(2) = -3$
$P(3) = \ 1$

se tiene que las raíces están en los intervalos: $[-1, 0'5]$; $[-0'5 , 2]$; $[2 , 3]$

Por medio de sucesivas aproximaciones se obtienen los siguientes valores para las raices:

$-0'53208$, $0'65270$, $2'87950$

6 *Por el procedimiento de la Regula falsi, calcular con aproximación hasta 0'01 las raíces reales de las siguientes ecuaciones:*

a) $x^3 - x + 1 = 0$

SOLUCION

Dada la ecuación $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$ se observa que no puede tener raíces positivas puesto que en $+\sqrt{3}$ presenta un mínimo, siendo la función creciente para valores superiores a $+\sqrt{3}$ (y por tanto positiva) y positiva así mismo para los valores de $x \in [0, \sqrt{3}]$ puesto que al ser en ellos la función decreciente los valores que tome deben ser superiores al valor mínimo de la misma.

Para localizar raíces negativas calculemos algunos valores de $f(x)$:

$f(0) = 1$
$f(-1) = -1$
$f(-2) = -5$

y por tanto la raíz estará comprendida entre 0 y -1.

La recta que pasa por los puntos $(0 , 1)$ y $(-1 , -1)$ será:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} \quad ; \quad 2x + 2 = y + 1 \quad ; \quad 2x = y - 1$$

que corta al eje de abscisas en el punto $(-\frac{1}{2}, 0)$.

$$f(-\frac{1}{2}) = 1'375$$

luego la raíz estará entre -1 y $-0'5$.

La recta que pasa por los puntos $(-1,-1)$ y $(-0'5 , 1'375)$ será:

$$\frac{x+1}{-0'5+1}=\frac{y+1}{1'375+1} \qquad 2'375\,(x+1)=0'5\,(y+1)$$

que corta al eje de abscisas en $x=\dfrac{0'5}{2'375}=-0'790$

b) $x^4+0'5\,x-1'55=0$

SOLUCION

$$x=1 \quad \Rightarrow \quad P(x)=-0'05$$
$$x=1'5 \quad \Rightarrow \quad P(x)=4'2625$$

$$x=1+\frac{-0'05\,(1'5-1)}{4'2625-(-0'05)}=1'0058$$

c) $x^3-4x-1=0$

SOLUCION

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad P(x)=-1$$
$$x=2'5 \quad \Rightarrow \quad P(x)=4'625$$

$$x=2-\frac{-1\,(2'5-2)}{4'625+1}=2'0889$$

7 *Calcular, con exactitud hasta 0'01, por el método de Newton las raíces reales de las ecuaciones:*

a) $x^3-2x-5=0$ b) $2^x=4x$

c) $2x-Ln\,x-4=0$ d) $log\,x=\dfrac{1}{x}$

SOLUCION

a) $P'(x)=3x^2-1$

$$x=1 \quad P(1)=-5\ ,\ P'(1)=2 \quad \Rightarrow \quad x=1-\frac{-5}{2}=3'5$$

$$x=2 \quad P(2)=1\ ,\ P'(2)=11 \quad \Rightarrow \quad x=2-\frac{1}{11}=1'9091$$

entre ambos valores elegiremos como aproximación de la raíz: 1'9091 comprendido entre 1 y 2.

b) $P'(x)=2^x\,Ln\,x-4$

$$x=0 \quad P(0)=1\ ,\ P'(0)=-3'3069 \quad \Rightarrow \quad x=0'3024$$
$$x=1 \quad P(1)=-2,\ P'(1)=-2'6137 \quad \Rightarrow \quad x=0'2348$$

Dado que ambos valores están en el intervalo $[\,0\,,\,1\,]$ se efectuará una nueva aproximación, obteniendose:

Para $x=0'3024$ se obtiene $x=0'3099$

c) $2x - Lnx - 4 \quad = 0$

$$P'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$x = 2$	$P(2) = -0'6931$	$P'(2) = 1'5$	$\Rightarrow$	$x = 2'4621$
$x = 3$	$P(3) = \quad 0'9014$	$P'(3) = 1'6667$	$\Rightarrow$	$x = 2'4592$

Los dos valores podrían tomarse como aproximación de la raíz.

Efectuando una nueva aproximación a partir de ellos se obtiene respectivamente:

$$x = 2'4476 \quad y \quad x = 2'4475$$

tomaremos pues como aproximación de la raíz: 2'447

d) $\text{Log}\, x - \dfrac{1}{x}$

$$P'(x) = \frac{1}{x} \log e + \frac{1}{x^2}$$

$x = 2$	$P(2) = -0'1990$	$P'(2) = 0'4671$	$\Rightarrow$	$x = 2'4259$
$x = 3$	$P(3) = \quad 0'1438$	$P'(3) = 0'2259$	$\Rightarrow$	$x = 2'4381$

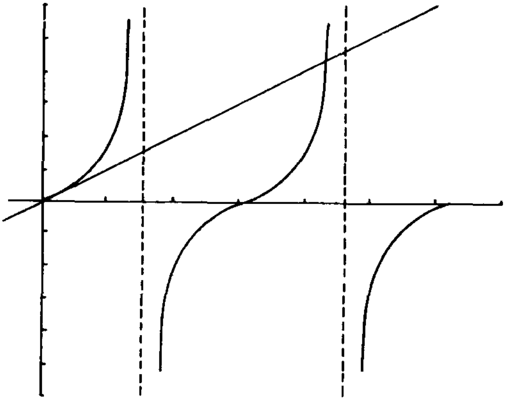
Ambos valores podrían tomarse como aproximación de la raíz.

Aproximando nuevamente a partir de $x = 2'4381$ obtenemos $x = 2'5062$.

8 *Calcular con exactitud hasta 0'001 la mínima raíz positiva de la ecuación* $tg\, x = x$.

SOLUCION

Representemos graficamente las funciones $y = tg\, x$, $y = x$.



De acuerdo con la representación gráfica, la primera raíz positiva estará comprendida entre π y $\frac{3\pi}{2}$.

Para aproximar el valor se utilizará el método de Newton partiendo del valor x = 4'70 obteniéndose sucesivamente los siguientes valores:

4'6883 , 4'6670, 4'6312, 4'5805 , 5'5284 , 4'4991 , 4'9936 , 4'4934

Dado que a partir de este último valor las sucesivas aproximaciones difieren a partir de la quinta cifra decimal, se tomará como aproximación de la primera raíz positiva de la ecuación dada: 4'4934.

CAPITULO XIV
Interpolación

1 *Dada la tabla*

$log\ 1 = 0'000$ $log\ 3 = 0'477$ $log\ 5 = 0'699$

$log\ 2 = 0'301$ $log\ 4 = 0'602$

calcular, valiéndose de la interpolación lineal, los números:

$log\ 1'7$; $log\ 2'5$; $log\ 3'1$; $log\ 4'6$

SOLUCION

Para calcular log 1'7, teniendo en cuenta que $1 < 1'7 < 2$ calcularemos la recta AB, siendo $A = (1 , 0)$ y $B = (2 , 0'301)$, que será:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{\log 2 - \log 1}$$

y de la cual, haciendo $x = 1'7$ se obtendrá el log 1'7, esto es:

$$\frac{1'7-1}{1} = \frac{\log 1'7}{0'301} \quad \Rightarrow \quad \log 1'7 = 0'2107$$

Analogamente se obtendrá:

$\log 2'5 = 0'389$ a partir de log 2 y log 3.

$\log 3'1 = 0'4895$ a partir de log 3 y log 4.

$\log 4'6 = 0'6602$ a partir de log 4 y log 5.

2 *La solubilidad del cloruro amónico en el agua a distintas temperaturas toma los siguientes valores:*

Temperatura	*10°*	*20°*	*30°*	*40°*	*50°*	*60°*
Solubilidad	*33*	*37*	*42*	*46*	*51*	*55*

Hallar, utilizando la interpolación lineal, la solubilidad a 32'5°.

SOLUCION

Utilizando para la interpolación lineal los valores de la solubilidad a 30° y 40° se tiene

$$\frac{32'5-30}{40-30} = \frac{S(32'5)-42}{46-42}$$

de donde:

$$S(32'5^\circ) = 43.$$

3 *Dada la tabla*

$sen\ 10^\circ = 0'1736$ $sen\ 13^\circ = 0'2250$

$sen\ 11^\circ = 0'1908$ $sen\ 14^\circ = 0'2419$

$sen\ 12^\circ = 0'2079$ $sen\ 15^\circ = 0'2588$

completetarla, calculando los valores de los senos cada medio grado, utilizando la interpolación por medio de un polinomio de segundo grado.

SOLUCION

A partir de sen 10°, sen 11° y sen12° calcularemos sen 10° 3o' y sen 11° 30'.

La parábola que pasa por los tres puntos de referencia tiene por coeficientes las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 0'1736 = 100\,a + 10\,b + c \\ 0'1908 = 121\,a + 11\,b + c \\ 0'2079 = 144\,a + 12\,b + c \end{cases}$$

del que se obtiene, restando a cada ecuación la precedente, :

$$\begin{cases} 0'0172 = 21\,a + b \\ 0'0171 = 23\,a + b \end{cases}$$

y restando nuevamente:

$$-0'0001 = 2\,a \qquad \Rightarrow \qquad a = -\,0'00005$$

a partir del cual se obtienen sucesivamente:

$$b = 0'01825$$

$$c = 0'0039$$

siendo la parábola que pasa por los tres puntos:

$$y = -\,0'00005\,x^2 + 0'01825\,x + 0'0039$$

que nos permite calcular:

$$\text{sen } 10'5^\circ = -0'00005 \,.\, (10'5)^2 + 0'01825 \,.\, 10'5 + 0'0039 = 0'1839$$

$$\text{sen } 11'5^\circ = 0'2039$$

Analogamente, utilizando sen 12°, sen 13° y sen 14° se calculan:

$$\text{sen } 12'5^\circ = 0'2165$$

$$\text{sen } 13'5^\circ = 0'2335$$

y, finalmente, utilizando sen 13° , sen 14° y sen 15° , se obtiene:

$$\text{sen } 14'5^\circ = 0'2503$$

4 ***Dados los cuadrados de 6, 7 y 8 , calcular $\sqrt{55}$***

SOLUCION

Aproximaremos mediante un polinomio de segundo grado.

Los coeficientes de la parábola serán las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 6 = 36^2\,a + 36\,b + c \\ 7 = 49^2\,a + 49\,b + c \\ 8 = 64^2\,a + 64\,b + c \end{cases}$$

cuyas soluciones son: $a = -0'0003$
$b = 0'1$
$c = 2'79$

y por tanto

$$\sqrt{55} = -(55)^2 \,.\, 0'0003 + 55 \,.\, 0'1 + 2'79 \cong 7'38$$

5 *Los valores de la tensión de vapor del alcohol ordinario, expresados en atmósferas, son:*

Temperatura	*65°*	*70°*	*75°*	*80°*	*85°*	*90°*
Tensión	*0'575*	*0'714*	*0'876*	*1'070*	*1'299*	*1'559*

Haciendo uso de la fórmula de Lagrange, hallar la temperatura de ebullición a la presión normal.

SOLUCION

Para utilizar la fórmula de Lagrange dispondremos un cuadro de doble entrada para facilitar los cálculos:

a − b / a / b	(65°) 0'575	(70°) 0'714	x 0'762	(75°) 0'876	(80°) 1'070	(85°) 1'299	(90°) 1'599
0'575	—	0'139	0'187	0'301	0'495	0'724	0'984
0'714	−0'139	—	0'048	0'162	0'356	0'585	0'845
0'762	−0'187	−0'048	—	0'114	0'308	0'537	0'797
0'876	−0'301	−0'162	−0'114	—	0'194	0'423	0'683
1'070	−0'495	−0'356	−0'308	−0'194	—	0'229	0'489
1'299	−0'724	−0'585	−0'537	−0'423	−0'229	—	0'260
1'559	−0'984	−0'845	−0'797	−0'683	−0'489	−0'260	—

Aplicando directamente la expresión de Lagrange se obtiene:

$$P(762) = 65\,\frac{0'048\,(-0'114)(-0'308)(-0'537)(-0'797)}{(-0'139)(-0'301)(-0'495)(-0'725)(-0'984)} +$$

$$+\,70\,\frac{0'187(-0'114)(-0'308)(-0'537)(-0'797)}{0'139(-0'162)(-0'356)(-0'585)(-0'845)} +$$

$$+\,75\,\frac{0'187.0'048(-0'308)(-0'537)(-0'797)}{0'301.0'162(-0'194)(-0'423)(-0'683)} +$$

$$+\,80\,\frac{0'187.0'048(-0'114)(-0'537)(-0'797)}{0'495.0'356.0'194\,(-0'229)(-0'489)} +$$

$$+\,85\,\frac{0'187.0'048\,(-0'114)(-0'308)(-0'797)}{0'724.0'585.0'423.0'229\,(-0'260)} +$$

$$+\,90\,\frac{0'187.0'048\,(-0'114)(-0'308)(-0'537)}{0'984.0'845.0'683.0'489.0'260}$$

que, salvo las posibles aproximaciones que se utilicen para efectuar los cálculos, da:

$$71'46°$$

que será la temperatura de ebullición a 762 mm de presión.

6 *Una función está dada por la tabla:*

x	*−2*	*1*	*2*	*4*
f(x)	*25*	*−8*	*−15*	*−23*

Formar el polinomio de interpolación de Lagrange y hallar el valor de f(x) para x = 0.

SOLUCION

$$P(x) = -\frac{25}{72}(x-1)(x-2)(x-4) - \frac{8}{9}(x+2)(x-2)(x-4) +$$

$$+\frac{15}{8}(x+2)(x-1)(x-4) - \frac{23}{36}(x+1)(x-1)(x-2)$$

a partir del cual se obtiene:

$$P(0) = 1$$

7 *Dada la tabla de los valores de una función:*

x	*0*	*1*	*3*	*4*	*5*
f(x)	*1*	*−3*	*25*	*129*	*381*

calcular el valor de f(x) para x = 0'5 y x = 2 utilizando:

a) La interpolación lineal

b) La fórmula de Lagrange

SOLUCION

a) Utilizando la interpolación lineal se obtiene

$f(0'5) = -1$ utilizando $f(0)$ y $f(1)$

$f(2) = 11$ utilizando $f(1)$ y $f(3)$

b) Por el método de Lagrange, salvo aproximaciones en los cálculos, se obtiene:

$f(0'5) = -1'031$

$f(2) = -3$

CAPITULO XV
Integración. Cálculo de primitivas

1 *Calcular las siguientes integrales indefinidas.*

a) $$\int \left(2\,senx - \frac{3}{2}\cos x + 2\,e^{x} - 1\right) dx$$

b) $$\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{0'5}{1+x^2}\quad dx$$

c) $\int (4 + 3x^3)\,dx$ d) $\int \left(\frac{1}{x}\right)^3 dx$ e) $\int (1 - 2x)\,dx$

f) $\int \frac{dx}{1-4x}$ g) $\int 4 . e^{x-1}\,dx$ h) $\int (4 - a^{x-2})\,dx$

SOLUCION

a) $-2\cos x - \frac{3}{2}\,senx + 2\,e^{x} - x + C$

b) $2\,arc\,senx - 3tgx + 0'5\,arc\,tgx + C$

c) $4x + \frac{3}{4}x^4 + C$

d) $-\frac{1}{2x^2} + C$

e) $x - x^2 + C$

f) $-\frac{1}{4}Ln(1-4x) + C = Ln(1-4x)^{-1/4} + \ln K = Ln\frac{K}{\sqrt[4]{1-4x}}$

g) $4\,e^{x-1} + C$

h) $4\,x - \frac{a^{x-2}}{Ln\,a} + C$

2 *Calcular las siguientes integrales indefinidas aplicando el método de integración por partes.*

a) $\int x^2\,e^{2x}\,dx$

SOLUCION

Si se toma: $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

$g'(x) = e^{2x}$ $g(x) = \frac{e^{2x}}{2}$

se tiene, por la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2\, e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{\cancel{2}} \cancel{2}x\, dx \qquad (1)$$

Aplicando nuevamente el método a la integral que aparece en el miembro de la derecha:

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{2x} \qquad g(x) = \dfrac{e^{2x}}{2}$ resultará:

$$\int e^{2x}\, x\, dx = \frac{x\, e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x\, e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$$

y sustituyendo en (1) se obtiene finalmente:

$$\int x^2\, e^{2x}\, dx = \frac{x^2\, e^{2x}}{2} - \frac{x\, e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{2x^2 - 2x + 1}{4} \cdot e^{2x} + C$$

b) $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\; dx$

SOLUCION

$f(x) = x^2 \qquad f'(x) = 2x \qquad g'(x) = \operatorname{sen} 2x \qquad g(x) = -\dfrac{\cos 2x}{2}$

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x\; dx = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) 2x\, dx = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \int \cos 2x \,.\, x\, dx$$

Tomando:

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1 \qquad g'(x) = \cos 2x \qquad g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

resulta:

$$\int \cos 2x \,.\, x\, dx = \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} - \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} dx = \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}$$

de donde:

$$\int x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

c) $\int x^2 \operatorname{Ln} x\, dx$

SOLUCION

Tomando $f(x) = \operatorname{Ln} x \qquad g'(x) = x^2$ se obtiene:

$$\int x^2 \operatorname{Ln} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Ln} x - \frac{x^3}{9} + C$$

d) $\int x^3 (Ln\ x)^2\ dx$

SOLUCION

$$\int x^3\ (\text{Ln } x)^2\ dx = \frac{x^4\ (\text{Ln } x)^2}{4} - \int \frac{x^3}{2}\ \text{Ln } x\ dx$$

donde se ha tomado:

$$f(x) = (\text{Ln } x)^2 \qquad f'(x) = 2\ \frac{\text{Ln } x}{x} \qquad g'(x) = x^3 \qquad g(x) = \frac{x^4}{4}$$

y finalmente:

$$= \frac{x^4}{4}\ (\text{Ln } x)^2 - \frac{x^4}{8}\ \text{Ln } x + \frac{x^4}{32} + C$$

tomando

$$f(x) = \text{Ln } x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(x) = \frac{x^3}{2} \qquad g(x) = \frac{x^4}{8}$$

e) $\int (2 - x) \cos 2x\ \ dx$

SOLUCION

$$\int (2 - x) \cos 2x\ dx = \frac{2 - x}{2}\ \text{sen } 2x - \frac{\cos 2x}{4} + C$$

tomando:

$$f(x) = 2 - x \qquad f'(x) = -1 \qquad g'(x) = \cos 2x \qquad g(x) = \frac{\text{sen } 2x}{2}$$

f) $\int (4 + 2x + x^2)\ e^{-2x}\ dx$

SOLUCION

$$\int (4 + 2x + x^2)\ e^{-2x}\ dx = -(4 + 2x + x^2)\ \frac{e^{-2x}}{2} + \quad \frac{e^{-2x}}{2}\,(2 + 2x)\ dx$$

tomando: $\quad f(x) = 4 + 2x + x^2\ ;\ f'(x) = 2 + 2x\ ;\ g'(x) = e^{-2x}\ ;\ g(x) = \dfrac{-e^{-2x}}{2}$

y finalmente:

$$= -(4 + 2x + x^2)\frac{e^{-2x}}{2} - (2 + 2x)\ \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$$

donde se ha tomado:

$$f(x) = 2 + 2x \qquad f'(x) = 2 \qquad g'(x) = \frac{e^{-2x}}{2} \qquad g(x) = -\ \frac{e^{-2x}}{4}$$

g) $\int e^{3x} \cos 2x\ \ dx$

SOLUCION

Tomando:

$f(x) = \cos 2x \qquad f'(x) = -2 \text{ sen } 2x \qquad g'(x) = e^{3x} \qquad g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$

resulta:

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \cos 2x \frac{e^{3x}}{3} + \int \frac{2}{3} e^{3x} \text{ sen } 2x \, dx$$

y tomando ahora:

$f(x) = \text{sen } 2x \qquad f'(x) = 2 \cos 2x \quad g'(x) = \frac{2}{3} e^{3x} \qquad g(x) = \frac{2}{9} e^{3x}$

resulta:

$$= \cos 2x \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{9} \text{ sen } 2x \; e^{3x} - \int \frac{4}{9} \cos 2x \, e^{3x} \, dx$$

En esta expresión nos aparece la integral que deseamos calcular.

Aislaremos pues esta integral en el primer miembro:

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx + \frac{4}{9} \int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{13}{9} \int e^{3x} \cos 2x \, dx =$$

$$= \cos 2x \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{9} \text{ sen } 2x \; e^{3x}$$

de donde:

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{9}{13} \left(\cos 2x \frac{e^{3x}}{3} + \frac{2}{9} \text{ sen } 2x \; e^{3x} \right) + C$$

h) $\displaystyle \int \frac{Ln\, x}{x^2} \, dx$

SOLUCION

Tomando:

$f(x) = \text{Ln} x \;, \; g'(x) = \frac{1}{x^2}$ se obtiene $\displaystyle \int \frac{\text{Ln } x}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \text{Ln} x - \frac{1}{x} + C$

3 *Calcular las siguientes integrales indefinidas atendiendo las sugerencias que se indican:*

a) $\displaystyle \int \frac{dx}{a + x^2} \qquad (x = t\sqrt{a})$

SOLUCION

Tomando $x = t\sqrt{a} \qquad dx = dt\sqrt{a}$ resulta:

$$\int \frac{dx}{a + x^2} = \int \frac{dt\sqrt{a}}{a + a\,t^2} = \frac{\sqrt{a}}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{arc tg } t = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{arc tg } \frac{x}{\sqrt{a}} + C$$

b) $\displaystyle \int \frac{dx}{a - x^2}$

SOLUCION

Tomando $x = t\sqrt{a}$ $\quad dx = dt\sqrt{a}$ se obtiene:

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = \int \frac{dt\sqrt{a}}{a - a\,t^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{dt}{1 - t^2}$$

expresión que, por ser una función racional, se descompone:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} = \frac{A(1-t) + B(1+t)}{1-t^2}$$

$$1 = A\,(1-t) + B\,(1+t)$$

identidad que, danto valores a t, nos da:

$$t = 1 \quad\Rightarrow\quad 1 = 2\,B \quad\Rightarrow\quad B = \frac{1}{2}$$

$$t = -1 \quad\Rightarrow\quad 1 = 2\,A \quad\Rightarrow\quad A = \frac{1}{2}$$

de donde:

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \int\frac{\frac{1}{2}}{1-t}\quad dt = \frac{\sqrt{a}}{a}\;\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1+t) - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}(1-t) + C =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{a}\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}} + C = \frac{\sqrt{a}}{a}\;\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\sqrt{a}+x}{\sqrt{a}-x}} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{9 - 4x^2} \qquad \left(x = \frac{3t}{2} \right)$

SOLUCION

Tomando $x = \dfrac{3t}{2}$ $\quad dx = \dfrac{3\,dt}{2}$

$$\int \frac{dx}{9 - 4x^2} = \int \frac{\frac{3}{2}dt}{9 - 9t^2} = \int\frac{\frac{3}{2}\;dt}{9(1-t^2)} = \frac{1}{6}\int\frac{dt}{1-t^2} =$$

que ya apareciía en el ejercicio anterior, y por tanto :

$$= \frac{1}{6}\;\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,(1+t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(\,1-t) = \frac{1}{12}\;\mathrm{Ln}\;\frac{1+t}{1-t} + C = \frac{1}{12}\;\mathrm{Ln}\;\frac{3+2x}{3-2x} + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \qquad \left(x = \frac{a}{t} \right)$

SOLUCION

Tomando: $x = \frac{a}{t}$, $dx = -\frac{a\,dt}{t^2}$ resulta:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{-\frac{a\,dt}{t^2}}{a^2 + \frac{a^2}{t^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = -\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{a} \text{arc tg } t + C = -\frac{1}{a} \text{arc tg} \frac{a}{x} + C$$

e) *e)* $\int sen^3 x\, dx$ $\quad (sen^2 x = 1 - cos^2 x)$

SOLUCION

$$\int sen^3 x\, dx = \int sen^2 x\, sen\, x\, dx = \int (1 - cos^2 x)\, sen\, x\, dx =$$

$$= \int (sen\, x - eos^2 x\, senx)\, dx = -eos\, x + \frac{cos^3 x}{3} + C$$

4 *Calcular las siguientes integrales indefinidas por el método de cambio de variable.*

a) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+4} + x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

SOLUCION

Tomando $x = 2\,tg\,t$, $dx = 2\,(1 + tg^2 t)\,dt$ resulta:

$$\int \frac{\sqrt{4\,tg^2 t + 4} + 2\,tg\,t}{\sqrt{4\,tg^2\,t + 4}}\, 2\,(1 + tg^2\,t)\,dt = \int \frac{\cancel{2}\sqrt{tg^2+1} + \cancel{2}\,tgt}{\cancel{2}\sqrt{tg^2 t+1}}\, 2\,(1+tg^2\,t)\,dt =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{cos\,t} + tg\,t}{\frac{1}{cos\,t}}\, 2\,(1 + tg^2\,t)\,dt = 2\int (1 + sent)(1 + tg^2\,t)\,dt = (1)$$

$$= 2\int (1 + tg^2 t + sent + sen\,t\,tg^2\,t)\,dt = 2\int (1 + tg^2\,t)dt + 2\int sent\,(1+tg^2 t)dt$$

la primera de las cuales es inmediata y la segunda (2) se calcula aplicando el método de integración por partes:

$f(t) = sen\,t$ $\quad f'(t) = eos\,t$ $\quad g'(t) = 1 + tg^2\,t$ $\quad g(t) = tg\,t = \frac{sent}{cos\,t}$ de donde:

$$(2) = sen\,t\;tg\,t - \int cos\,t \frac{sen\,t}{cos\,t}\,dt = sen\,t\;tg\,t + cos\,t$$

y por tanto:

$$(1) = 2\,\mathrm{tg}\,t + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{tg}\,t + 2\cos t + C = x + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{4}{\sqrt{x^2+4}} + C$$

teniendo en cuenta que si $x = 2\,\mathrm{tg}\,t$ se tiene:

$$\cos t = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \qquad \mathrm{sen}\,t = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

SOLUCION

Tomando $e^x = t$, $x = \mathrm{Ln}\,t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$ resulta:

$$\int \frac{\frac{dt}{t}}{t\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = \int \frac{dt}{t^2\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2}}} = \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$$

Efectuamos un nuevo cambio de variable:

$$t = \sec u = \frac{1}{\cos u} \qquad dt = \frac{\mathrm{sen}\,u}{\cos^2 u}\,du \qquad \text{y se obtiene:}$$

$$= \int \frac{\frac{\mathrm{sen}\,u}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos u}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}-1}}\,du = \int \frac{\frac{\mathrm{sen}\,u}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos u}\sqrt{\frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}}}\,du =$$

$$= \int \frac{\frac{\mathrm{sen}\,u}{\cos^2 u}}{\frac{1}{\cos^2 u}\sqrt{1-\cos^2 u}}\,du = \int \frac{\mathrm{sen}\,u}{\sqrt{1-\cos^2 u}}\,du = \int du =$$

$$= u + C = \mathrm{arc\,sec}\,t + C = \mathrm{arc\,sec}\,e^x + C\,.$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{sen}\,x\cos x}$

SOLUCION

Utilizando el cambio de variable general $\mathrm{tag}\dfrac{x}{2} = t$ se obtiene:

$$\int \frac{\dfrac{2\,dt}{1 + t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2} \cdot \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2)\,dt}{t\,(1-t^2)} \qquad (1)$$

expresión racional que puede descomponerse:

$$\frac{1+t^2}{t(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

obteniéndose $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ por lo que:

$$(1) = \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} = \text{Ln}\, t - \text{Ln}\,(1-t) - \text{Ln}\,(1+t) + C =$$

$$= \text{Ln}\, \frac{t}{1-t^2} + C = \text{Ln}\, \frac{\text{tg}\dfrac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2\, \dfrac{x}{2}} + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1}\, dx$

SOLUCION

Tomaremos: $e^x = t$, $x = \text{Ln}\, t$, $dx = \dfrac{dt}{t}$

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx = \int \frac{t+1}{t-1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{(t+1)\; dt}{t(t-1)} \qquad (1)$$

expresión racional que puede descomponerse en:

$\dfrac{t+1}{t(t-1)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t}$ resultando $A = 2$, $B = -1$, y por tanto

$$(1) = \int \frac{2}{t-1}\, dt - \int \frac{dt}{t} = 2\, \text{Ln}(t-1) - \text{Ln}\, t + C =$$

$$= \text{Ln}\, \frac{(t-1)^2}{t} + C = \text{Ln}\, \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} + C$$

5 *Calcular las siguientes integrales indefinidas de funciones racionales.*

a) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{x+1}$

SOLUCION

$$\int \frac{x^2\, dx}{x+1} = \int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}\, dx = \int (x-1)\, dx + \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \text{Ln}(x+1) + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$

SOLUCION

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$1 = A(x-1)(x-2) + B\,x(x-2) + C\,x(x-1)$$

De esta identidad se obtendrá, dando valores a x :

$x = 0 \longrightarrow 1 = 2A \longrightarrow A = 1/2$

$x = 1 \longrightarrow 1 = -B \longrightarrow B = -1$

$x = 2 \longrightarrow 1 = 2C \longrightarrow C = 1/2$ de donde

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)} = \int \frac{1}{2x}\,dx - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{2(x-2)} =$$

$$= \frac{1}{2}\text{Ln}\,x - \text{Ln}(x-1) + \frac{1}{2}\text{Ln}(x-2) + C = \text{Ln}\frac{\sqrt{x}\,\sqrt{x-2}}{x-1} + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x}{1 - x^2}\,dx$

SOLUCION

Como primer paso dividiremos el numerador por el denominador.

$$\int \frac{(-x^2+1)(-x) - 2x}{1 - x^2}\,dx = \int -x\,dx + \int \frac{-2x\,dx}{1-x^2} = -\frac{x^2}{2} + \text{Ln}(1-x^2) + C$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^4}\,dx$

SOLUCION

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^4} = \frac{A}{(x-1)^4} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$$

de donde

$$x^3 - x^2 + 1 = A + B(x-1) + C(x-1)^2 + D(x-1)^3$$

y dando valores a x se obtiene:

$x = 1 \longrightarrow 1 = A$

$x = 0 \longrightarrow 1 = A - B + C - D$

$x = 2 \longrightarrow 5 = A + B + C + D$

$x = -1 \longrightarrow -1 = A - 2B + 4C - 8D$

Las soluciones del sistema que se obtiene son:

A = 1 , B = 1 , C = 2 , D = 1

y por tanto:

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^4}\, dx = \int \frac{dx}{(x-1)^4} + \int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{-1}{3(x-1)^3} - \frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \text{Ln}\,(x-1) + C$$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)(1-x^2)}$

SOLUCION

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1-x^2)} = \int \frac{dx}{(1+x)(1+x)(1-x)} = \int \frac{dx}{(1+x)^2(1-x)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2\,(1-x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2}$$

$$1 = A\,(1+x)^2 + B\,(1-x)(1+x) + C\,(1-x)$$

de cuya resolución se obtiene:

A = 1/4 , B = 1/4 , C = 1/2

$$(1) = \int \frac{dx}{4(1-x)} + \int \frac{dx}{4(1+x)} + \int \frac{dx}{2(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{Ln}\,(1-x) + \frac{1}{4}\,\text{Ln}\,(1+x) - \frac{1}{2}\;\frac{1}{1+x} + C$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4 - 13x^2 + 36}$

SOLUCION

El denominador puede escribirse $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$ y se tendrá:

$$\frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}$$

De esta identidad se obtiene:

A = –1/30 B = 1/30 C = 1/20 D = –1/20

y finalmente resulta:

$$-\frac{1}{30}\text{Ln}(x+3) + \frac{1}{30}\text{Ln}(x-3) + \frac{1}{20}\,\text{Ln}(x+2) - \frac{1}{20}\,\text{Ln}(x-2) + \underline{C}$$

g) $$\int \frac{x^3 - 8x^2 - 4x + 8}{x^4 - 5x^2 + 4}\, dx$$

SOLUCION

$$\frac{x^3 - 8x^2 - 4x + 8}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$$

obteniéndose: $A = 2$, $B = -2$, $C = 1/2$, $D = 1/2$ y por tanto:

$$2\,\mathrm{Ln}(x+2) - 2\,\mathrm{Ln}(x-2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x+1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Ln}(x-1) + C$$

CAPITULO XVI
Areas y volúmenes

1 *Teniendo en cuenta que* $0 \leqslant sen^2\, x \leqslant 1$, *acotar la integral*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\, sen^2 x}\quad dx$$

SOLUCION

Considerando que si $x \in [\, 0 \,, \frac{\pi}{2}\,]$ es $1 \leqslant 1 + \frac{1}{2}\,\text{sen}^2 x \leqslant \frac{3}{2}$ por lo que:

$$dx \leqslant I \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{3}{2}}\; dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{6}}{2}\, dx$$ de donde:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant I \leqslant \frac{\pi\sqrt{6}}{4}$$

2 *Acotar las siguientes integrales:*

$$\int_0^1 \sqrt{4 + x^2}\;\; dx \quad ; \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8 + x^3} \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x}$$

SOLUCION

a) Si $x \in [\, 0 \,, 1]$ se verifica $2 \leqslant \sqrt{4 + x^2} \leqslant 3$ por lo que

$$\int_0^1 2\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{4 + x^2}\; dx \leqslant \int_0^1 3\, dx \Rightarrow 2 \leqslant \int_0^1 \sqrt{4 + x^2} \leqslant 3$$

b) Si $x \in [-1 \,, 1]$ se verifica $\frac{1}{9} \leqslant \frac{1}{8 + x^3} \leqslant \frac{1}{7}$ por lo que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9} \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8 + x^3} \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{dx}{7} \Rightarrow \frac{2}{9} \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8 + x^3} \leqslant \frac{2}{7}$$

c) Si $x \in [\, 0 \,, 2\pi]$ se verifica $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ por lo que

$$\frac{1}{13} \leqslant \frac{1}{10 + 3\cos x} \leqslant \frac{1}{7} \qquad \Rightarrow \frac{2\pi}{13} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x} \leqslant \frac{2\pi}{7}$$

3 ***Hallar los valores medios de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:***

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$f(x) = a + b \cos x \qquad -\pi \leqslant x \leqslant +\pi$$
$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

SOLUCION

Las funciones dadas cumplen las condiciones exigidas en el teorema del **valor** [redacted] y por tanto éste podrá aplicarse a cada una de ellas en los intervalos dados.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = f(\alpha)\,.\,(1-0) \;\Rightarrow\; \alpha^2 = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (a + b\cos x)\,dx = \Big[ax + b \operatorname{sen} x\Big]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi a \;\Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow 2\pi a = (a + b\cos\alpha)\,2\pi \;\Rightarrow\; a = a + b\cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow$

$\displaystyle\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}^2\alpha\,.\,(\pi - 0) \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}\,,\quad \alpha = \frac{3\pi}{4}$

4 *Aplicando la regla de Barrow, calcular las siguientes integrales definidas:*

$$\int_1^2 (x^2 + x + 1)\,dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx \quad ; \quad \int_1^2 x \operatorname{Ln} x\,dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\,dx \quad ; \quad \int_3^5 \frac{x}{x-1}\,dx \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$$

SOLUCION

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2 + x + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \frac{29}{6}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$

c) $\displaystyle\int_1^2 x \operatorname{Ln} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\operatorname{Ln} x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\operatorname{Ln} 2 - \frac{3}{4}$

Para calcular la integral indefinida $\int x \operatorname{Ln} x\,dx$ se utiliza el método de integración por partes, tomando: $f(x) = \operatorname{Ln} x$ y $g'(x) = x$.

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\,dx = \left[\frac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{e^{\pi} + 1}{2}$

En el cálculo de la integral indefinida debe utilizarse, de forma reiterada, el método de integración por partes.

e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen } x}{1+\cos x}\,dx = \Big[-\text{Ln}\,(1+\text{eos } x)\Big]_0^{2\pi} = 0$

f) $\displaystyle\int_3^5 \frac{x}{x-1}\,dx = \int_3^5 \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = \Big[x+\text{Ln}(x-1)\Big]_3^5 = 2+\text{Ln } 2$

g) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \text{ sen} x\,dx = \Big[-x\cos x + \text{sen} x\Big]_{-\pi} = 0$

En el cálculo de la integral indefinida se utilizará el método de integración por partes.

5 *Hallar el área del trapecio mixtilineo limitado por el eje 0X, la curva* $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x}$ *y las abscisas* $x = 1$ *y* $x = 3$.

SOLUCION

Entre las abscisas 1 y 3 la gráfica de la curva f(x) no corta al eje de abscisas, por lo que el área vendrá dada por:

$$\int_1^3 \frac{x+2}{x^2+4x}\,dx = \left[\frac{1}{2}\text{Ln}\,(x^2+4x)\right]_1^3 = \frac{1}{2}\text{Ln } 21 - \frac{1}{2}\text{Ln } 5 = \text{Ln}\sqrt{\frac{21}{5}} \text{ u. a.}$$

6 *Hallar el área de la porción de plano comprendida entre la curva* $y = 6x^2 - x^3$ *y el eje 0X.*

SOLUCION

Dado que $6x^2 - x^3 = x^2(6-x)$, la curva corta al eje 0X en los puntos 0 y 6. Por tanto el área pedida será:

$$\int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = \left[2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 108 \text{ u. a.}$$

7 *Calcular el área de la figura limitada por la parábola* $y = x^2$, *por las rectas* $x = 1$ *y* $x = 3$ *y por el eje de abscisas.*

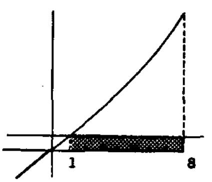
SOLUCION

$$\int_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_1^3 = \frac{13}{3} \text{ u. a.}$$

8 *Hallar el área de la figura limitada por la curva* $y = x^3$, *la recta* $y = 1$ *y la vertical* $x = 8$.

SOLUCION

La representación gráfica del recinto cuya superficie deseamos calcular es la de la figura adjunta.



De acuerdo con ella se tendrá:

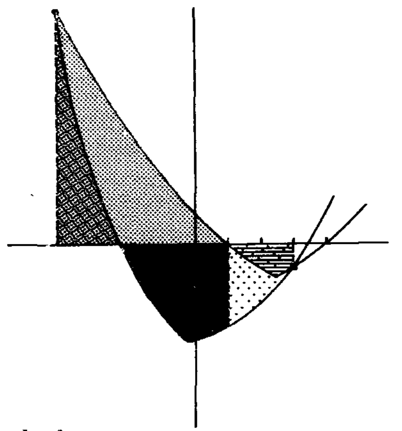
$$S = \int_1^8 x^3\,dx - S\,(\text{rectángulo}) = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^8 - 7 = \frac{4.067}{4}\ \text{u.a}$$

9 *Calcular el área de la porción de plano limitada por las curvas $y = x^2 - 5x + 4$ e $y = 2x^2 + x - 23$.*

SOLUCION

Los puntos de corte de las curvas dadas son $x = 3$ y $x = -9$.

Antes de proceder al cálculo del área es conveniente representar graficamente el recinto en cuestión, aunque sea de forma aproximada.



$$y = x^2 - 5x + 4$$

corta al eje de abscisas en $x = 1$ y $x = 4$.

Tiene un mínimo en el punto $(2'5, -2{,}25)$.

$$y = 2x^2 + x - 23$$

corta al eje de abscisas en, aproximadamente, $x = 3'15$, $x = -3'65$.

Tiene un mínimo en el punto $(-0'25, -23{,}125)$.

El área solicitada vendrá dada por:

$$S = S_1 - S_2 + S_3 + S_4 - S_5$$ donde

$S_1 = \int_{-9}^{1} (x^2-5x+4)\,dx$ zona 

$S_2 = \int_{-9}^{-3.65} (2x^2 + x - 23)\,dx$ zona 

$S_3 = \int_{-3.65}^{1} (2x^2 + x - 23)\,dx$ zona 

$S_4 = \int_{1}^{3} (2x^2 + x - 23)dx$ zona 

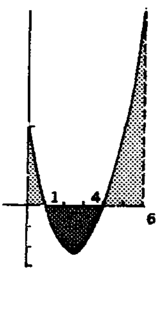
$S_5 = \int_{1}^{3} (x^2 - 5x + 4)\,dx$ zona 

Resultando finalmente $S = 288$ u. a.

10 *Hallar el área de la porción de plano limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 4$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 6$.*

SOLUCION

La representacín gráfica del recinto solicitado es la adjunta puesto que:



$$y = x^2 - 5x + 4$$

corta al eje de abscisas en $x = 1$, $x = 4$ y tiene un mínimo en $x = 2,5$.

De acuerdo con la representación gráfica el área será:

$$S_1 + S_2 + S_3$$

donde

$$S_1 = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)\,dx = 1'833$$

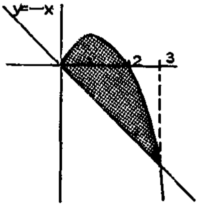
$$S_2 = \int_1^4 (x^2 - 5x + 4\,dx = 4'5$$

$$S_3 = \int_4^6 (x^2 - 5x + 4)\,dx = 8'667$$

y por tanto $S = 1'833 + 4'5 + 8'667 = 15$ u. a.

11 *Calcular el área de la figura limitada por la parábola $y = 2x - x^2$ y la recta $y = -x$.*

SOLUCION



De acuerdo con la representación gráfica del recinto que se adjunta, será

$$S = S_1 + S_2 - S_3$$

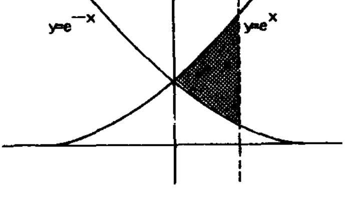
donde:

$$S_1 = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx \quad , \quad S_2 = \text{área triángulo} \; , \quad S_3 = \int_2^3 (2x - x^2)\,dx$$

y por tanto: $S = 4'5$ u. a.

12 *Calcular el área de la figura limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.*

SOLUCION



Como en los ejercicios anteriores será preciso considerar la representación gráfica del recinto considerado.

De acuerdo con la gráfica de la función exponencial resultará el gráfico adjunto.

El área vendrá dada por:

$$\int_0^1 e^x\,dx - \int_0^1 e^{-x}\,dx = e - 2 + \frac{1}{e} \text{ u. a.}$$

13 *Hallar el volumen de una esfera de radio R.*

SOLUCION

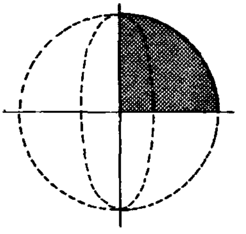
Una esfera es el cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo alrededor del eje de abscisas.

La ecuación de la circunferencia de radio R es :

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = R^2 - x^2$$

por lo que el volumen engendrado por la intersección del semicírculo con el primer cuadrante del plano, será:

$$\int_0^R \pi (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left[(R^2 x - \frac{x^3}{3}) \right]_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}$$



y el volumen de la esfera será en definitiva:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

14 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el arco de la curva $y = 3x - x^2$ comprendido entre $x = 1$ y $x = 3$.*

SOLUCION

$$V = \int_1^3 \pi (3x - x^2)^2\, dx = \pi \int_1^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4)\, dx = \pi \left[3x^3 - \frac{6x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_1^3 = 6'4 \text{ u.a}$$

15 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la curva $y = sen^2 x$, en el intervalo $x = 0$ hasta $x = \pi$*

SOLUCION

$$V = \int_0^\pi \pi\, (sen^2\, x)^2\, dx = \pi \int_0^\pi sen^4 x\, dx$$

Para el cálculo de esta integral se tendrá en cuenta que:

$$sen^4\, x = (sen^2\, x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}\right)$$

y por tanto:

$$V = \pi \int_0^\pi sen^4 x\, dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{3}{2} x - sen\, 2x + \frac{sen\, 4x}{8}\right]_0^\pi = \frac{3\pi^2}{8} \text{ u. a.}$$

16 *Hallar la expresión del volumen limitado por la superficie engendrada por la rotación alrededor del eje OX del segmento de la recta $y = 3x + 2$ comprendido entre $x = 0$ y $x = 2$.*

SOLUCION

$$V = \pi \int_0^2 (3x+2)^2 \, dx = \pi \left[\frac{1}{9} (3x+2)^3 \right]_0^2 = 56\,\pi \text{ u. v.}$$

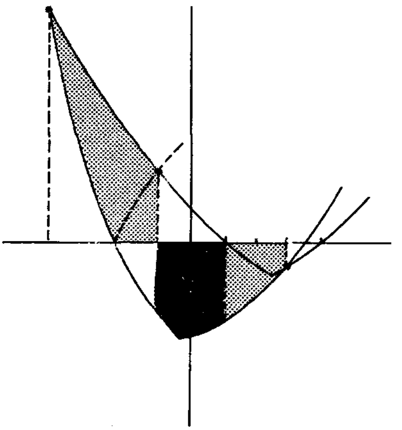
17 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la superficie comprendida entre las curvas:*

$y = x^2 - 5x + 4$ $\qquad\qquad$ $y = 2x^2 + x - 23$

SOLUCION

El recinto comprendido entre las curvas dadas corresponde al del ejercicio 9.

Su representación será la de la figura adjunta.



El volumen que se nos pide será la suma de los engendrados al girar alrededor del eje de abscisas las zonas rayadas.

El punto P es el punto de corte de la curva

$$y = x^2 - 5x + 4$$

con la curva

$$y = -2x^2 - x + 23$$

simétrica de la segunda respecto al eje OX.

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

siendo:

$$V_1 = \pi \int_{-9}^{-1.93} (x^2-5x+4)^2 \, dx - \pi \int_{-9}^{-3.65} (2x^2+x-23)^2 \, dx = \pi \ .\ 13.684'6211$$

$$V_2 = \pi \int_{-1.93}^{1} (2x^2 + x - 23)^2 \, dx = \pi \ .\ 1.373'5892$$

$$V_3 = \pi \int_1^3 (2x^2 + x - 23)^2 \, dx - \pi \int_1^3 (x^2 - 5x + 4) \, dx = \pi \ .\ 352'5333$$

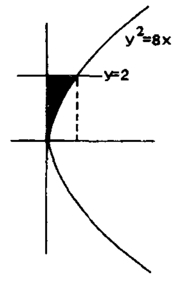
y por tanto:

$$V = 15.410'7436 \text{ u.v.}$$

18 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la figura limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y por la recta $y = 2$.*

SOLUCION

Se entenderá que se nos pide el volumen engendrado por la zona rayada en la figura adjunta.

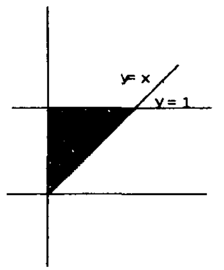


El volumen será la diferencia entre el del cilindro que engendra el segmento de recta y el del cuerpo que engendra el arco de parábola.

$$V = 4\pi \cdot \frac{1}{2} - \pi \int_0^{1/2} 8x\,dx = 2\pi - \pi \left[4x^2\right]_0^{1/2} = \pi \text{ u.v.}$$

19 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX el triángulo de vértices (0,0), (0,1) y (1,1)*

SOLUCION

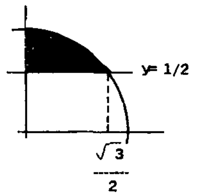


Considerando la figura adjunta se obtiene:

$$V = \int_0^1 \pi\,dx - \int_0^1 \pi x^2\,dx = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

20 *Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la superficie intersección del círculo* $x^2 + y^2 \leqslant 1$ *y el semiplano* $y \geqslant \frac{1}{2}$.

SOLUCION



Considerando la figura adjunta se obtiene:

$$V = \int_0^{\sqrt{3}/2} \pi\,(1 - x^2)\,dx - \int_0^{\sqrt{3}/2} \pi \frac{1}{4}\,dx = \pi \left[\frac{3x}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$$

y el volumen total será el doble del calculado, o sea : $V = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{4}$.

CAPITULO XVII
Integración numérica

1 *Se han registrado cada dos minutos las velocidades de un coche entre la 1^h y la $1^h\ 30^m$ y se han obtenido los siguientes datos*

Hora	*Velocidad (Km/h)*
1^h	*20*
$1^h\ 2^m$	*17'5*
$1^h\ 4^m$	*17*
$1^h\ 6^m$	*18*
$1^h\ 8^m$	*22'5*
$1^h\ 10^m$	*30*
$1^h\ 12^m$	*40*
$1^h\ 14^m$	*47'5*

Hora	*Velocidad (Km/h)*
$1^h\ 16^m$	*53*
$1^h\ 18^m$	*58*
$1^h\ 20^m$	*62*
$1^h\ 22^m$	*64*
$1^h\ 24^m$	*64'5*
$1^h\ 26^m$	*63*
$1^h\ 28^m$	*61*
$1^h\ 30^m$	*55*

Calcular el espacio recorrido por el coche entre la 1^h y la $1^h\ 30^m$ utilizando (a) la fórmula de los trapecios, (b) la fórmula de Simpson.

SOLUCION

a)

$$S = \frac{2}{60}\left(10 + 17'5 + 17 + 18 + 22'5 + 30 + 40 + 47'5 + 53 + 58 + 62 + 64 + \right.$$

$$\left. + 64'5 + 63 + 61 + \frac{55}{2} \right) = 21'85 \text{ Km.}$$

b)

$$E = y_0 + y_n = 75$$

$$I = 17'5 + 18 + 30 + 47'5 + 58 + 64 + 63 = 298$$

$$P = 17 + 22'5 + 40 + 53 + 62 + 64'5 + 61 = 320$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{60} (75 + 4 \cdot 298 + 2 , 320) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1.907}{60} = 21'18 \text{ Km.}$$

2 *Se han calculado, con un planímetro, las áreas encerradas por las distintas curvas de nivel cortadas por una presa de 30 m de altura, y se ha obtenido la siguiente tabla:*

Cota	*Area (Km^2)*
810	*0*
812	*6*
814	*14*
816	*36*
818	*71*
820	*112*
822	*185*
824	*260*

Cota	*Area (Km^2)*
826	*352*
828	*460*
830	*574*
832	*705*
834	*830*
836	*913*
838	*961*
840	*985*

Calcular el volumen del agua embalsada (en m^2)

SOLUCION

Al no indicarnos el método a aplicar para calcular el volumen del agua embalsada se utilizarán los dos métodos de que disponemos:

a) Método de los trapecios.

$$V = 2\,(6 + 14 + 36 + \ldots + 961 + \frac{985}{2}) = 11.943\ Km^3 = 11.943\ \ 10^6\ \ m^3$$

b) Fórmula de Simpson.

$E = 985 \quad , \quad I = 2.492 \quad , \quad P = 2.987$

$$V = \frac{1}{3}\,.\ 2\,.\,(985 + 9.968 + 5.974) = 11.284\ Km^3 = 11.284\,.\,10^6\ m^3\ .$$

3 *De una función desconocida $f(x)$ se conoce la siguiente tabla de valores:*

x	*f(x)*
0	*1,0*
0'2	*0'96079*
0'4	*0'85214*
0'6	*0'69768*
0'8	*0'52729*
1'0	*0'36788*

Calcular el valor aproximado de $\int_0^1 f(x)\,dx.$

SOLUCION

a) Fórmula de los trapecios.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0'2\,(0'5 + 3'03790 + 0'18394) = 0'744368$$

b) Fórmula de Simpson.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{0'2}{3}\,(1'36788 + 4\,.\,1'65847 + 2\,.\,1'37943) = 0'717373$$

4 *Calcular: (a) por la fórmula de los trapecios; (b) por la formula de Simpson, la integral:*

$$\int_0^3 (1 + x^2)^{3/2}\ dx$$

SOLUCION

Para calcularla calcularemos previamente los valores de la función subintegral para valores de x entre 0 y 3 a intervalos de longitud 0'2.

x	f(x)
0	1
0'2	1'06
0'4	1'25
0'6	1'59

x	f(x)
0'8	2'10
1	2'83
1'2	3'81
1'4	5'09

x	f(x)
1'6	6'72
1'8	8'73
2	11'78
2'2	14'11

x	f(x)
2'4	17'58
2'6	21'62
2'8	26'28
3	31'62

En base a estos valores se tendrá:

a) Fórmula de los trapecios:

$$\int_0^3 (1+x^2)^{3/2}\,dx = 0'2\,.\,140'26 = 28'05$$

b) Fórmula de Simpson.

$$\int_0^3 (1+x^2)^{3/2}\,dx = \frac{0'2}{3}\,(32'62 + 275'68 + 110'06) = 27'89$$

5 *Calcular, por la fórmula de Simpson o la de los trapecios, las siguientes integrales:*

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad ; \quad \int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

$$\int_1^2 x \log x \; dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \frac{sen x}{x}\,dx$$

SOLUCION

Para calcular las integrales se calcularán algunos valores:

x	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{e^x}{x}$	$\frac{1}{1+x}$	$x \log x$
0		1		1	
0'2		0'96		0'83	
0'4		0'86		0'71	
0'6		0'74		0'63	
0'8		0'61		0'56	
1	1	0'5	2'72	0'5	0
1'2	0'83		2'77		0'10
1'4	0'71		2'90		0'20
1'6	0'63		3'10		0'33
1'8	0'56		3'36		0'46
2	0'5		3'69		0'60
2'2	0'45				
2'4	0'42				
2'6	0'38				
2'8	0'36				
3	0'33				

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = \begin{cases} \text{F. Trapecios} = 0'2\,.\,5'51 = 1'10 \\ \text{F. Simpson} = \dfrac{0'2}{3}\,(1'33 + 8'40 + 5'48) = 1'01 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} \text{F. Trapecios} = 0'2\,.\,3'92 = 0'71 \\ \text{F. Simpson} = \dfrac{0'2}{3}\,(1'5 + 5'88 + 3'40) = 0'72 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx = \begin{cases} \text{F. Trapecios} = 0'2 \,.\, 15'33 = 3'07 \\ \text{F. Simpson} = \dfrac{0'2}{3} (1'5 + 25'04 + 11'74) = 2'88 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \begin{cases} \text{F. Trapecios} = 0'2 \,.\, 1'39 = 0'278 \\ \text{F. Simpson} = \dfrac{0'2}{3} (0'6 + 2'64 + 0'86) = 0'27 \end{cases}$$

$$\int_1^2 x \log x \, dx = \begin{cases} \text{F. Trapecios} = 0'2 \,.\, 3'48 = 0'696 \\ \text{F. Simpson} = \dfrac{0'2}{3} (1'5 + 5'08 + 2'92) = 0'63 \end{cases}$$

Para calcular la última integral podemos considerar la siguiente tabla de valores:

0	1
$\pi/12$	0'99
$2\pi/12$	0'95
$3\pi/12$	0'90
$4\pi/12$	0'83
$5\pi/12$	0'74
$6\pi/12$	0'64
$7\pi/12$	0'53
$8\pi/12$	0'41
$9\pi/12$	0'30
$10\pi/12$	0'19
$11\pi/12$	0'09
π	0

$$\int_0^\pi \frac{\text{sen}x}{x} dx = \begin{cases} \text{F. Trapecios} = \dfrac{\pi}{12} \,.\, 7'07 = 1'85 \\ \text{F. de Simpson} = \dfrac{\pi}{36} (1 + 12'08 + 7'10) = 1'76 \end{cases}$$

CAPITULO XVIII
Cálculo de probabilidades

1 *Se realiza la experiencia: elegir una ficha de dominó. Se dice entonces que ha sucedido A_i si la suma total de puntos de la ficha extraida es i. ¿Cuál es el conjunto fundamental de probabilidad?.*

SOLUCION

Dado que las fichas de dominó tienen una suma mínima de cero puntos y máxima de doce, será:

$$\Omega = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \} .$$

2 *Si en el problema anterior se representa B_j, obtener una suma de puntos múltiplo de j, indicar en qué consisten los sucesos B_2, B_4, B_5, B_6, $B_4 \cap B_6$, $B_2 \quad (B_6 - B_4)$.*

SOLUCION

$$B_2 = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$$
$$B_4 = \{0, 4, 8, 12 \}$$
$$B_5 = \{ 0, 5, 10 \}$$
$$B_6 = \{0, 6, 12 \}$$
$$B_4 \cap B_6 = \quad 0, 12$$
$$B_2 \quad (B_6 - B_4) = B_2$$

3 *Una urna contiene tres bolas blancas y siete negras. ¿Cuál es la probabilidad de que una bola extraida sea blanca?*

SOLUCION

Hay tres bolas blancas sobre un total de diez. Habrá, pues, tres casos favorables al suceso "bola blanca" y diez casos posibles, por tanto:

$$P(\text{ Blanca }) = \frac{3}{10}$$

4 *¿Cuál es la probabilidad de que en un grupo de cinco cartas de una baraja española se presenten dos reyes? ¿Y de que existen dos o mas reyes?*

SOLUCION

a) En una baraja española hay 48 cartas. Al efectuar una extracción de cinco cartas el número de casos posibles será C^5_{48}, puesto que no tiene importancia el orden en que se han extraído las cartas.

El suceso cuya probabilidad deseamos calcular es:

$$\{\text{rey, rey, no rey, no rey, no rey}\}$$

y podremos formar un grupo de cinco cartas con esta distribución de $C^2_4 \times C^3_{44}$ puesto que los dos reyes podrán seleccionarse de C^2_4 maneras y las tres cartas no reyes de C^3_{44} formas.

Por tanto:

$$P(\text{dos reyes en cinco cartas}) = \frac{C_4^2 \,.\, C_{44}^3}{C_{48}^5} = \frac{43 \,.\, 42}{2 \,.\, 47 \,.\, 46 \,.\, 9} = \frac{43 \,.\, 7}{47.\, 46.\, 3}$$

b) El suceso cuya probabilidad se desea calcular es:

B = (extraer dos reyes) $\cup$ (extraer tres reyes) $\cup$ (extraer cuatro reyes)

y por tanto:

$$P(B) = P(\text{extraer dos reyes}) + P(\text{extraer tres reyes}) + P(\text{extraer cuatro reyes}) =$$

$$= \frac{C_4^2 \,.\, C_{44}^3}{C_{48}^5} + \frac{C_4^3 \,.\, C_{44}^2}{C_{48}^5} + \frac{C_4^4 \,.\, C_{44}^1}{C_{48}^5} = 5! \cdot \frac{44.43.42 + 2.44.43 + 44.1}{48.47.46.45.44}$$

5 *Una urna contiene 4 bolas blancas, 5 rojas y 6 negras. Otra contiene 5 bolas blancas, 6 rojas y 7 negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una bola en cada una de ellas ambas del mismo color?*

SOLUCION

El suceso que se nos pide es:

A = extraer bolas del mismo color $= (B_1 \;, B_2) \cup (R_1 \;, R_2) \cup (N_1 \quad N_2)$

donde $(B_1 \;, B_2)$ significa extraer bola blanca en la primera urna y bola blanca de la segunda urna.

$$P(A) = P(B_1 \;, B_2) + P(R_1 \;, R_2) + P(N_1 \;, N_2) = P(B_1).P(B_2) + P(R_1).P(R_2) +$$

$$+ P(N_1).P(N_2) = \frac{4}{15} \,.\, \frac{5}{18} + \frac{5}{15} \,.\, \frac{6}{18} + \frac{6}{15} \,.\, \frac{7}{18} = \frac{46}{135}$$

6 *A,B,C lanzan una moneda en este orden. ¿Cuáles son las probabilidades que tienen cada uo de sacar cara? Téngase en cuenta que cuando uno de ellos saca cara se interrumpe el juego.*

SOLUCION

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(\text{A no saque cara y B saque cara}) = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(C) = P(\text{A no saque cara, B no saque cara, C saque cara}) = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

7 *Una urna A contiene 12 bolas blancas y 20 negras; otra urna B contiene 15 bolas blancas y 18 negras. Se saca una bola de A y se introduce en B. Se extrae una bola de B. ¿Qué probabilidad hay de que la bola extraida de B sea blanca?.*

SOLUCION

El suceso "extraer bola blanca de la urna B", que llamaremos C, consiste en:

C = (Blanca en A y blanca en B) $\cup$ (Negra en A y blanca en B)

por tanto

P(C) = P(Blanca en A y blanca en B) + P(Negra en A y blanca en B) =

$$= \frac{12}{32} \cdot \frac{16}{34} + \frac{20}{32} \cdot \frac{15}{34} = \frac{49}{136}$$

8 ***Jugando con tres dados, ¿quién tiene más probabilidad de ganar, el que juega con el número 10 o el que juega con el número 12?.***

SOLUCION

La suma de diez puntos en el lanzamiento de tres dados puede darse en las siguientes distribuciones:

6–3–1 que según en qué dado aparezcan se presenta de seis formas distintas
6–2–2 que puede presentarse de tres formas
5–4–1 que puede presentarse de seis formas
5–3–2 que puede presentarse de seis formas
4–4–2 que puede presentarse de tres formas
4–3–3 que puede presentarse de tres formas

En total hay 27 casos favorables a obtener una suma de diez puntos. Por tanto:

$$\text{P(obtener suma de 10 puntos)} = \frac{27}{6^3} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

La suma de doce puntos puede darse en las siguientes distribuciones:

6–5–1 que puede presentarse de seis formas
6–4–2 que puede presentarse de seis formas
6–3–3 que puede presentasre de tres formas
5–5–2 que puede presentarse de tres formas
5–4–3 que puede presentarse de seis formas
4–4–4 que puede presentarse de una forma

En total hay 25 casos favorables. Por tanto:

$$\text{P(obtener suma de 12 puntos)} = \frac{25}{216}$$

Tendrá por tanto mayor probabilidad de ganar el jugador que juega con el número 10

9 ***Lanzando al aire 7 monedas, ¿qué probabilidad hay de que queden cuatro caras y tres cruces? ¿Y de que salgan más de tres caras?***

SOLUCION

Una distribución de cuatro caras y tres cruces puede presentarse $PR_7^{4,3}$ y por tanto:

$$\text{P(4 caras , tres cruces)} = \frac{PR_7^{4,3}}{VR_2^7} = \frac{\frac{7!}{4!\ \ 3!}}{2^7} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2^7 \cdot 3!} = \frac{35}{2^7} = \frac{35}{128}$$

La probabilidad de que salgan más de tres caras será:

$$\text{P(más de tres caras)} = \text{P(4 caras, 3 cruces)} + \text{P(5 caras, 2 cruces)} + \text{P(6 caras, 1 cruz)} +$$

$$+ \text{ P(7 caras)} = \frac{PR_7^{4,3}}{VR_2^7} + \frac{PR_7^{5,2}}{VR_2^7} + \frac{PR_7^{6,1}}{VR_2^7} + \frac{1}{VR_2^7} = \frac{35 + 21 + 7 + 1}{2^7} = \frac{64}{2^7} = \frac{1}{2}$$

10 *Siguiendo la nomenclatura del problema 2 calcular:*

$$P(B_4)\ ,\ P(B_6)\ ,\ P(B_2 \cap B_4)\ ,\ P(B_6 - B_4)$$

SOLUCION

$$P(B_4) = \frac{8}{28}\ ,\ P(B_6) = \frac{6}{28}\ ,\ P(B_2 \cap B_4) = \frac{8}{28}\ ,\ P(B_6 - B_4) = \frac{1}{28}$$

Para calcular estas probabilidades se calculará previamente el número de casos favorables de cada una de las trece sumas de puntosque se pueden obtener en las fichas del dominó.

11 *Demostrar que:*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) . P(B/A) . P(C/A \cap B)$$

SOLUCION

$$P(A) . P(B/A) . P(C/A \cap B) = P(A \cap B). P(C/A \cap B) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B \cap C)$$

12 *Tres jugadores A, B, C de igual maestría, están jugando una serie de partidas, en las que el ganador de cada jugada consigue un punto. El que alcance primero tres puntos será el ganador definitivo. A gana las partidas primera y tercera, mientras B gana la segunda. Hállese la probabilidad de que C sea el ganador definitivo y compararla con las probabilidades de ganar que tienen A y B.*

SOLUCION

Suceso "gane jugador A":

partida	4	5	6	7
ganador	A			
ganador	B	A		
ganador	B	C	A	
ganador	B	C	C	A
ganador	C	A		
ganador	C	B	A	
ganador	C	B	C	A
ganador	C	C	A	
ganador	C	C	B	A

$$P(\text{gane jugador A}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{57}{81} = \frac{19}{27}$$

Suceso "gane jugador B" :

partida	4	5	6	7
ganador	B	B		
ganador	B	C	B	
ganador	B	C	C	B
ganador	C	B	B	
ganador	C	B	C	B
ganador	C	C	B	B

$$P(\text{gane jugador B}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81} = \frac{18}{81} = \frac{6}{27}$$

Suceso "gane jugador C"

partida	4	5	6	7
ganador	B	C	C	C
ganador	C	C	C	
ganador	C	B	C	C
ganador	C	C	B	C

$$P(\text{gane jugador C}) = \frac{1}{81} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81} = \frac{6}{81} = \frac{2}{27}$$

13 *Se extraen simultáneamente dos cartas de una misma baraja de 52 cartas. Hállese la probabilidad de que una de ellas al menos sea yun corazón.*

SOLUCION

P(al menos un corazón) = P(corazón, no corazón) + P(corazón, corazón) + P(no corazón ,

$$\text{corazón}) = \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} + \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} + \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1.170}{2.652} = \frac{195}{442}$$

14 *Se hace un disparo con cada uno de tres cañones, siendo la probabilidad de hacerblaneo 0'1 0'2 y 0'3 respectivamente. Calcúlese la probabilidad de cada uno de los números posibles de blancos.*

SOLUCION

$$P(\text{ efectuar un blanco}) = P\left[(A, \text{no } B, \text{no } C) \cup (\text{no } A, B, \text{no } C) \cup (\text{no } A, \text{no } B, C)\right] =$$
$$= 0'398$$

$$P(\text{efectuar dos blancos}) = P\left[(A, B, \text{no } C) \cup (A, \text{no } B, C) \cup (\text{no } A, B, C)\right] =$$
$$= 0'092$$

$$P(\text{efectuar tres blancos}) = P(A, B, C) = 0'006$$

$$P(\text{no efectuar ningún blanco}) = P(\text{no } A, \text{no } B, \text{no } C) = 0'504$$

donde A significa que el primer cañón haga blanco, B que lo haga al segundo y C que lo haga el tercero.

15 *Una urna contiene dos bolas. Se sabe que la urna se llenó tirando al aire una moneda dos veces y poniendo una bola blanca en la urna por cada cara y una negra por cada cruz. Se extrae una bola de la urna y resulta ser de color blanco. Hallar la probabilidad de que la otra bola de la urna sea también blanca.*

SOLUCION

Se trata de una experiencia que reune las condiciones del teorema de Bayes:

$A_1 = \{$que la segunda bola extraídasea blanca$\}$

$A_2 = \{$ que la segunda bola extraída sea negra $\}$

$B = \{$ que la primera bola extraída sea blanca $\}$

$$P(A_1/B) = \frac{(\ P(A_1)\,.\,P(B/A_1)}{P(A_1).\ P(B/A_1) + P(A_2)\,.\,P(B/A_2)}$$

Teniendo en cuenta la forma en que se ha llenado la urna las posibles composiciones de la misma pueden ser:

$$(b\,,b) \quad (b\,,n) \quad (n\,,b) \quad (n\,,n)$$

y por tanto se tendrá:

$$P(A_1/B) = \frac{\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

16 *Se conoce como "Urna de Polya" el siguiente experimento. Se tiene una urna con "a" bolas blancas y "b" bolas negras. En cada extracción se saca una bola y, a continuación, se introducen "c" bolas de su mismo color, donde "c" es un número fijo. Se pide:*

- *Calcular la probabilidad de que se obtenga una bola negra en la primera extracción y una blanca en la segunda.*
- *Calcular la probabilidad de obtener una bola blanca en la tercera extracción.*
- *Calcular la probabilidad de que, en cuatro extracciones, se obtengan dos bolas de colores alternados.*

SOLUCION

a) Para calcular la probabilidad de obtener una bola negra en la primera extracción y una blanca en la segunda, P(N , B), debe tenerse en cuenta que la probabilidad de la segunda extracción depende del color de la bola que haya aparecido en la primera extracción, de modo que:

$$P(N\,,B) = P(N)\,.\,P^*_N\,(B)$$

donde P^*_N es la probabilidad asociada al suceso extraer bola negra en la primera extracción.

$$P(N\,,B) = \frac{b}{a+b}\,.\,\frac{a}{a+(b+c)}$$

b) El suceso "obtener bola blanca a la tercera extracción" se podrá descomponer del siguiente modo:

$$(-\,,-\,,B) = (B\,,B\,,B) \cup (B\,,N\,,B) \cup (N\,,B\,,B) \cup (N\,,N\,,B)$$

y por tanto

$$P(-\,,-\,,B) = P(B\,,B\,,B) + P(B\,,N\,,B) + P(N\,,B\,,B) + P(N\,,N\,,B) =$$

$$= P(B)\,.\,P^*_B(B)\ \,.\,P^*_{(B,B)} + P(B)\,.\,P^*_B(N)\,.\,P^*_{(B,N)}(B) + P(N)\,.\,P^*_N(B)\,.\,P^*_{(N,B)}(B) +$$

$$+\ P(N)\,.\,P^*_N(N)\,.\,P^*_{(N,N)}(B) =$$

$$= \frac{a}{a+b}\,.\,\frac{a+c}{a+b+c}\,.\,\frac{a+2c}{a+b+2c} + \frac{a}{a+b}\,.\,\frac{b}{a+b+c}\,.\,\frac{a+c}{a+b+2c} +$$

$$+\frac{b}{a+b}\,.\,\frac{a}{a+b}\,.\,\frac{a+c}{a+b+\ 2c} + \frac{b}{a+b}\,.\,\frac{b\ +c}{a+b+c}\,.\,\frac{a}{a+b+2c}$$

c) Que en cuatro extracciones se obtengan bolas de colores alternados se expresará como

$$(B, N, B, N) \cup (N, B, N, B)$$

$$P[(B, N, B, N) \cup (N, B, N, B)] = P(B, N, B, N) + P(N, B, N, B) =$$

$$= P(B) \cdot P^*_B(N) \cdot P^*_{(B,N)}(B) \cdot P^*_{(B,N,B)}(N) + P(N) \cdot P^*_N(B) \cdot P^*_{(N,B)}(N) \cdot P^*_{(N,B,N)}(B) =$$

$$= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+c} \cdot \frac{a+c}{a+b+2c} \cdot \frac{b+c}{a+b+3c} +$$

$$+ \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b+2c} \cdot \frac{a+c}{a+b+3c} =$$

$$= \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot (a+c) \cdot (b+c)}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)(a+b+3c)}$$

17 ***Se ponen en una urna 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extraen al azar tres bolas de la urna. Calcular la probabilidad de que todos los números extraídos sean mayores que 6. Calcular la probabilidad de que el más alto sea un 5.***

SOLUCION

a) Se pide $P(a,b,c)$ con $a > 6$, $b > 6$, $c > 6$.

Dado que en el enunciado no se especifica distinguiremos dos casos.

a.1) Que cada bola sea devuelta a la urna tras efectuar la extracción.
En este caso se tendrá:

$$P(a, b, c) = P(a) \cdot P(b) \cdot P(c)$$

y por tanto, teniendo en cuenta que en la urna hay cuatro bolas con número superior a 6,se tendrá:

$$P(a, b, c) = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{64}{1000}$$

a.2) Que la bola extraída no se devuelva a la urna.
En este caso se tendrá:

$$P(a, b, c) = P(a) \cdot P^*(b) \cdot P^*(c)$$

y por tanto

$$P(a, b, c) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{30}$$

b) La probabilidad que se pide puede interpretarse de dos formas:

b.1) Que apareciendo el 5 necesariamente las otras bolas sean menores que 5.

Cabe distinguir entonces entre:

b.1.1) Extracción con reemplazamiento.
En este caso el suceso, A, se concreta del siguiente modo:

$$A = (5,5,5) \cup (5,5,c) \cup (5,b,5) \cup (a,5,5) \cup (5,b,c) \cup (a,5,c) \cup (a,b,5)$$
siendo $a < 5$, $b < 5$, $c < 5$

de donde:

$$P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}+3\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{61}{1000}$$

b.1.2) Extracción sin reemplazamiento

En este caso A se concreta del siguiente modo:

$$A=(5\,,b,c)\quad (a\,,5\,,c)\quad (a,b\,,5)$$
$$a<5\ ,\ b<5\ ,\ c<5$$

de donde

$$P(A)=\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{20}$$

b.2) Que no necesariamente deba presentarse el cinco. Esto es:

$$A=(a\,,b\,,c)\qquad a\leqslant 5\ ,\ b\leqslant 5\ ,\ c\leqslant 5$$

Deberán considerarse dos casos:

b.2.1) Extracción con reemplazamiento:

$$P(A)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{8}$$

b.2.2) Extracción sin reemplazamiento

$$P(A)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{12}$$

18 *Un arquero tiene una probabilidad 0'6 de dar en el blanco cada vez que dispara una flecha. Se sabe que ha lanzado seis flecjas obteniendo tres blancos. Calcular la probabilidad de que el primer lanzamiento haya dado en el blanco.*

SOLUCION

Se trata de una situación con las características del teorema de Bayes:

A_1 = "primera flecha en el blanco"

A_2 = "primera flecha fuera del blanco"

B = " tres blancos en seis lanzamientos"

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\,.\,P(B/A_1)}{P(A_1).\,P(B/A_1)+P(A_2)\,.P(B/A_2)}$$

$P(B/A_1)=P($ de cinco lanzamientos dos en el blanco$)=C_5^2\ .\ 0'6^2\ .\ 0'4_3^3=10\ .\ 0'6^2\ 0'4^3$

$P(B/A_2)=P($ de cinco lanzamientos tres en el blanco$)=C_5^3\ .\ 0'6^2\ .\ 0'4^2=10\ .\ 0'6^3\ 0'4^2$

De donde:

$$P(A_1/B)=\frac{0'6\ .\ 10\ .\ 0'6^2\ .\ 0'\,6^3}{0'6\ .\ 10\ .\ 0'6^2\ .\ 0'4^3\ +\ 0'4\ .\ 10\ .\ 0'6^3\ .\ 0'4^2}=\frac{1}{2}$$

19 *En un examen una pregunta admite 5 posibles respuestas y el alumno debe señalar con una*

X la respuesta correcta. Se sabe que la probabilidad de que un determinado alumno sepa la respuesta es $\frac{2}{3}$ y la probabilidad de que acierte la respuesta correcta eligiéndola al azar es $\frac{1}{3}$.

Calcular la probabilidad de que el alumno supiera lo que se le preguntaba si se sabe que ha elegido la respuesta correcta.

SOLUCION

A_1 = "el alumno conoce la respuesta correcta"

A_2 = "el alumno no conoce la respuesta"

B = "el alumno ha elegido la respuesta correcta"

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) . P(B/A_1)}{P(A_1) . P(B/A_1) + P(A_2) . P(B/A_2)} = \frac{\frac{2}{3} . 1}{\frac{6}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{6}{7}$$

20 *Dos urnas A y B contienen bolas de colores, la primera 6 blancas y 7 azules, la segunda 5 blancas y 3 azules. Calcular la probabilidad de sacar una bola blanca si se escoge un saco al azar y luego se saca una bola de él. Calcular la probabilidad de sacar una bola azul si se meten todas las bolas en una sola urna y luego se extrae una bola de ésta.*

SOLUCION

a) P(obtener bola blanca eligiendo una urna al azar) =

= P(blanca en primera urna).P(extraer en primera) + P(Blanca en segunda urna) .

$$. \text{P(extraer en segunda)} = \frac{6}{13} . \frac{1}{2} + \frac{5}{8} . \frac{1}{2} = \frac{113}{208}$$

b) P(obtener bola azul si se juntan las bolas) = $\frac{10}{21}$

21 *Tres urnas contienen bolas de colores, la primera 3 blancas y 5 rojas, la segunda 6 rojas y 4 negras, la tercera 6 blancas, 2 rojas y 3 negras. Se lanza un dado. Si sale un 1 o un 2 se extrae entonces una bola de la primera urna, si un 3 o un 4, una bola de la segunda urna y si un 5 o un 6 una bola de la tercera urna. Se sabe que se ha extraído una bola roja. Calcular la probabilidad de que en el dado haya salido un 5 o un 6.*

SOLUCION

A_1 = "en el dado sale un 1 ó un 2"

A_2 = "en el dado sale un 3 ó un 4"

A_3 = "en el dado sale un 5 ó un 6"

B = "extraer bola roja"

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\ P(B/A_3)}{P(A_1)\, P(B/A_1) + P(A_2)\, P(B/A_2) + P(A_3)\, P(B/A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{11}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{11}} = \frac{80}{619}$$

Indice